

CHAPITRE III

LES ESPACES VECTORIELS

Les espaces vectoriels sont des ensembles dont les éléments s'appellent des vecteurs et qui se caractérisent par une certaine structure.

I. Structure d'espace vectoriel

L'un des espaces vectoriels les plus familiers aux économistes est l'ensemble $\mathbb{R}^2$. On trouve des éléments de $\mathbb{R}^2$ dans le modèle IS-LM, dans la présentation usuelle du modèle du consommateur, où on se limite, le plus souvent, à des paniers de biens ne comportant que deux éléments, ou lorsque l'on présente la fonction de production.

A. L'exemple de $\mathbb{R}^2$

Rappelons que $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples ordonnés $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ où u_1 et u_2 sont deux réels :

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

« couple ordonné » signifiant simplement que si $u_1 \neq u_2$, alors on a :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Si, par exemple, le couple

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

désigne un panier contenant x_1 pommes et x_2 poires, alors il va de soi que le panier

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

contenant une pomme et trois poires, diffère du panier

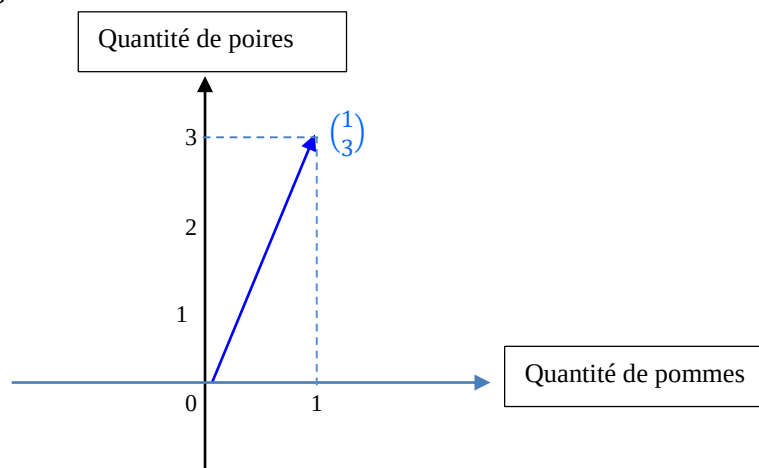
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

contenant trois pommes et une poire.

En revanche, on peut noter tous ces couples indifféremment en colonne $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ou en ligne (u_1, u_2) . Dans ce manuel, on privilégiera la notation en colonne afin de faciliter le passage de l'écriture matricielle à l'écriture vectorielle et inversement.

Par exemple, les couples (Y, i) ou $\begin{pmatrix} Y \\ i \end{pmatrix}$ du modèle IS-LM, (K, L) ou $\begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}$ de la fonction de production, ou le panier de bien $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^2$.

Graphiquement, on peut représenter un vecteur soit par une flèche, soit par un point. Par exemple, le panier de biens $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ contenant 1 pomme et 3 poires peut être représenté comme suit :



1. La somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$

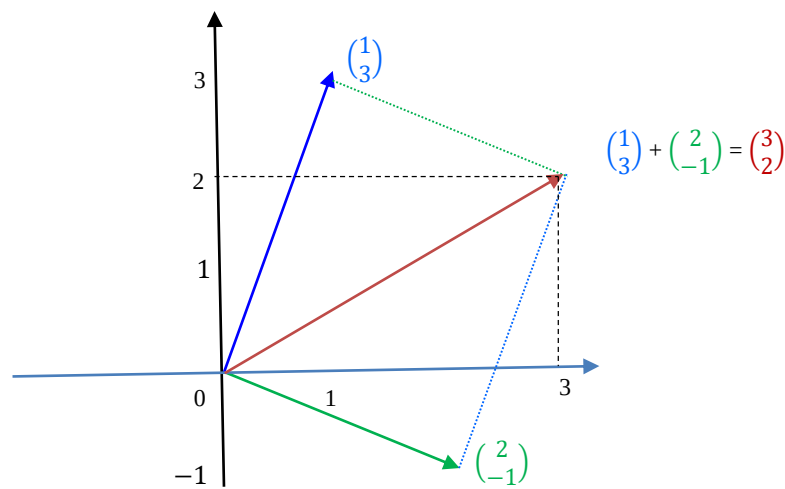
La somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ se définit de la même façon que la somme de deux matrices de format $(2, 1)$ – ou $(1, 2)$ si l'on note les vecteurs en lignes. Ainsi, la somme des deux vecteurs :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

est-elle égale à :

$$U + V = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Graphiquement, on fait la somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ en appliquant la règle du parallélogramme. Par exemple, la somme des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ peut être représentée comme suit :



Remarquons que la somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ a pour résultat un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Pour cette raison on dit que cette somme est une loi de composition *interne*. Plus généralement,

Définition III.1

On appelle **loi de composition interne** toute application de $E \times E$ dans E .

Une loi de composition interne compose *deux éléments d'un même ensemble* (ici E , d'où le $E \times E$) pour donner un élément de cet ensemble.

La somme vectorielle a les mêmes propriétés S_1 à S_4 que la somme de deux matrices de même format (voir cours n°2)¹ : elle est (S_1) **commutative** et (S_2) **associative** ; (S_3) elle possède un **élément neutre** unique, le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, appelé **le vecteur nul** et noté $\mathbf{0}$ ou $\vec{0}_2$ et, enfin, (S_4) tout vecteur X de $\mathbb{R}^2$ a un **opposé**, noté $-X$, pour la somme vectorielle.

En résumé : sur $\mathbb{R}^2$, on peut définir une loi de composition interne, la somme vectorielle, ayant les propriétés S_1, S_2, S_3 et S_4 .

¹ En revanche, comme on peut écrire un vecteur en ligne ou en colonne, il n'est pas question de transposé d'un vecteur.

Remarque : il y a donc deux notations possibles pour la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

- La notation matricielle : $0_{2,1}$ car c'est une matrice nulle ayant 2 lignes et une colonne,
- La notation vectorielle : $\vec{0}_2$ où la flèche indique qu'il s'agit d'un vecteur nul et où le nombre 2 précise que ce vecteur appartient à $\mathbb{R}^2$.

2. Produit d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par un réel (homothétie)

Le produit d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par un réel – ou homothétie – se définit de la même façon que le produit d'une matrice par un réel. Ainsi, le produit du vecteur :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

par le réel λ est égal à :

$$\lambda U = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}.$$

Graphiquement, ce vecteur a la même direction que U . Seule sa longueur change. Le vecteur $2U$, par exemple, est deux fois plus long que U .

Remarquons que le produit d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par un réel a pour résultat un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Pour cette raison on dit que cette somme est une loi de composition *externe*. Plus généralement,

Définition III.2

On appelle **loi de composition externe** toute application de $E \times F$ dans E .

Une loi de composition externe compose *deux éléments de deux ensembles différents* (ici E et F , d'où le $E \times F$) pour donner un élément du premier de ces deux ensembles.

La somme vectorielle a les mêmes propriétés P_1 à P_4 que le produit d'une matrice par un réel (voir cours n°2)².

En résumé : sur $\mathbb{R}^2$, on peut définir une loi de composition externe, l'homothétie (ou produit d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par un réel) ayant les propriétés P_1 , P_2 , P_3 et P_4 .

Fin de la semaine 4

Faire le Quiz : « Quiz-Cours n° 4 »

Dans la préparation des TD, vous pouvez aller jusqu'aux exercices 1a et 2a de l'exercice 1 du dossier de TD 3.

² En revanche, comme on peut écrire un vecteur en ligne ou en colonne, il n'est pas question de transposé d'un vecteur.

B. Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Si l'on considère maintenant, non plus les couples ordonnés de $\mathbb{R}^2$, mais les triplets ordonnés de $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, on peut définir, exactement de la même façon :

- une loi de composition interne, la somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, vérifiant les propriétés S_1, S_2, S_3 et S_4 , l'élément neutre de la somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ étant le vecteur nul $\mathbb{R}^3$, noté $\vec{0}_3$, avec :

$$\vec{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

- une loi de composition externe, le produit d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par un réel, vérifiant les propriétés P_1, P_2, P_3 et P_4 .

Et il en va de même si l'on considère les quadruplets ordonnés de réels de $\mathbb{R}^4$. Sur $\mathbb{R}^4$, on peut définir deux lois : une loi de composition interne, la somme vectorielle, possédant les propriétés S_1 à S_4 , et une loi de composition externe, l'homothétie, possédant les propriétés P_1 à P_4 .

A cet égard, $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5 \dots$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ ont tous la même structure : une structure d'espace vectoriel.

Définition III.3¹

On appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{R}$** , tout ensemble E muni de deux lois :

- une loi de composition interne (appelée somme vectorielle) ayant les propriétés S_1, S_2, S_3 et S_4
- et une loi de composition externe (appelée homothétie ou produit d'un vecteur par un réel) et vérifiant P_1, P_2, P_3 et P_4 .

C. Les sous-espaces vectoriels

Si l'on reprend la définition d'un espace vectoriel, on voit tout de suite que démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel est une opération assez longue, comportant une bonne dizaine d'étapes : il faut, en effet, démontrer que, sur cet ensemble, on peut définir deux lois de compositions, l'une interne, l'autre externe. Il faut ensuite démontrer que la première possède les quatre propriétés S_1 à S_4 , et enfin que la seconde possède les quatre propriétés P_1 à P_4 .

Cela dit, la plupart de ces étapes sont inutiles lorsque l'ensemble en question est une partie – ou un sous-ensemble – non vide d'un espace vectoriel. Considérons, en effet, par exemple l'ensemble E_1 suivant :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, u_2 = 2u_1 \right\}.$$

Les éléments de l'ensemble E_1 sont les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont le second élément est égal à deux fois le premier, comme, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tout élément de cet ensemble étant un vecteur de $\mathbb{R}^2$, E_1 est une partie – un sous-ensemble – de $\mathbb{R}^2$. En conséquence :

- Les deux lois de compositions sont donc les mêmes pour E_1 que pour $\mathbb{R}^2$: on peut faire la somme de deux vecteurs de E_1 puisque ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et, pour la même raison, on peut faire le produit de tout vecteur de E_1 par un réel.
- En outre, ces deux lois de compositions ont les mêmes propriétés : la somme de deux éléments de E_1 étant une somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, elle a les mêmes propriétés que cette dernière

¹ La définition, plus générale, d'un espace vectoriel sur un corps K est donnée dans (Gun & Jallais 2014, p. 93).

sur $\mathbb{R}^2$; et le produit d'un élément de E_1 par un réel étant un produit d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ par un réel, il a les mêmes propriétés que ce dernier sur $\mathbb{R}^2$.

Dès lors, pour savoir si E_1 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on doit simplement vérifier :

- d'une part, que la somme vectorielle est bien une loi de composition *interne* sur E_1 , autrement dit que, lorsque l'on fait la somme de deux éléments quelconques de E_1 , le résultat est bien un élément de E_1 (on dit alors que E_1 est stable pour la somme vectorielle) ;
- et, d'autre part, que l'homothétie est bien une loi de composition *externe* sur E_1 , autrement dit que, lorsque l'on fait le produit d'un élément quelconque de E_1 par un réel, on obtient bien un élément de E_1 (on dit alors que E_1 est stable pour l'homothétie).

Dans notre exemple, les éléments de l'ensemble $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, u_2 = 2u_1 \right\}$.

sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{pmatrix}, \text{ où } u_1 \text{ est un réel.}$$

Considérons deux éléments quelconques de E_1 ,

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{pmatrix}, \text{ avec } u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix}, \text{ avec } v_1 \in \mathbb{R},$$

Leur somme $W = U + V$ est égale à :

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ 2u_1 + 2v_1 \end{pmatrix}.$$

et comme $2u_1 + 2v_1 = 2(u_1 + v_1)$, on a bien $w_2 = 2w_1$ ce qui implique que W est un élément de E_1 .

De même, le produit d'un vecteur de E_1 ,

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{pmatrix}, u_1 \in \mathbb{R},$$

par un réel α , est égal à :

$$\alpha U = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha 2u_1 \end{pmatrix}.$$

C'est donc un élément de E_1 puisque $\alpha 2u_1 = 2(\alpha u_1)$.

Il s'ensuit que l'ensemble E_1 est stable pour la somme vectorielle et l'homothétie ; c'est donc un espace vectoriel. On dit que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

De façon plus générale, on a la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ III-1

Soit E_i une partie non vide d'un espace vectoriel² E .

L'ensemble E_i est un espace vectoriel si et seulement si E_i est stable pour la somme vectorielle et pour l'homothétie.

On dit alors que E_i est un **sous-espace vectoriel** de E sur $\mathbb{R}$.

Contrairement à E_1 , l'ensemble E_2 :

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, u_2 = 2u_1 + 1 \right\},$$

n'est pas un espace vectoriel. Pourtant, comme E_1 , E_2 est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$: tous ses éléments sont en effet des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et il contient par exemple le vecteur :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

puisque $3 = 2(1) + 1$.

Les lois de composition sont donc les mêmes pour E_2 et $\mathbb{R}^2$ et elles ont les mêmes propriétés, du moins sur $\mathbb{R}^2$. Cependant, on peut démontrer que la somme de deux éléments de E_2 n'est pas

² Dans ce cours, on ne rencontrera que des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

nécessairement un élément de E_2 : la somme vectorielle n'est donc pas une loi de composition *interne* sur E_2 .

Les éléments de E_2 sont, en effet, de la forme $\begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 + 1 \end{pmatrix}$, où u_1 est un réel.

Considérons deux éléments quelconques de E_2 ,

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 + 1 \end{pmatrix}, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 + 1 \end{pmatrix}, v_1 \in \mathbb{R},$$

Leur somme $W = U + V$ est égale à :

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ 2u_1 + 1 + 2v_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Ce n'est donc pas un élément de E_2 puisque :

$$w_2 = 2u_1 + 1 + 2v_1 + 1 = 2(u_1 + v_1) + 2 = 2w_1 + 2 \neq 2w_1 + 1.$$

Il s'ensuit que l'ensemble E_2 n'est pas stable pour la somme vectorielle ; ce n'est donc pas un espace vectoriel.

Nous aurions pu arriver directement à cette conclusion en remarquant que E_2 ne contient pas le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ (puisque $0 \neq 2(0) + 1$) et, en conséquence, que la somme vectorielle n'a pas d'élément neutre sur E_2 (elle ne vérifie donc pas la propriété S_3 sur E_2).

Plus généralement :

PROPRIÉTÉ III-2

Pour que E_i soit un sous-espace vectoriel de E sur $\mathbb{R}$, il faut que E_i contienne l'élément neutre de E pour la somme vectorielle.

Cas particulier de $\mathbb{R}^n$: pour que E_i soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$, il faut que E_i contienne le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$, noté $\vec{0}_n$.

Cette condition n'est qu'une *condition nécessaire*. Elle permet donc d'établir rapidement, si elle n'est pas remplie, que E_i *n'est pas* un espace vectoriel. En revanche, dans le cas où elle est remplie, elle *n'est pas suffisante* pour conclure que E_i est un espace vectoriel.

D. Systèmes générateurs d'un espace vectoriel

Étant données les propriétés de la somme vectorielle et de l'homothétie sur un espace vectoriel, on a vu, d'une part, que la somme de deux vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ était un vecteur de E et, d'autre part, que le produit d'un vecteur de E par un réel était également un vecteur de E . Il s'ensuit que les combinaisons linéaires de vecteurs de E sont des vecteurs de E .

Par exemple, la combinaison linéaire des deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

affectés des réels **1** et **2** est le vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer qu'une combinaison linéaire est en fait une combinaison de sommes et d'homothéties de vecteurs.

Réciproquement, on peut dire que tout vecteur peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire d'autres vecteurs du même espace vectoriel.

Par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

est (on vient de le voir) une combinaison linéaire des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

affectés des réels 1 et 2, qui sont alors les coefficients de la combinaison linéaire ;

mais c'est aussi une combinaison linéaire des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

affectés des scalaires -1 et 4 , puisque :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si l'on prend maintenant le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

on peut également l'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puisque :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puisque :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

On peut alors se demander si l'on ne peut pas écrire tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, on peut se demander si, pour chaque espace vectoriel E , on ne pourrait pas trouver un ensemble de vecteurs (contenant si possible un petit nombre de vecteurs) desquels on pourrait déduire, par combinaison linéaire, tous les autres vecteurs de E . En fait, de tels ensembles existent : ce sont les **systèmes générateurs** de E .

Définition III.4

On dit que l'ensemble $G = \{C_1, \dots, C_n\}$ **engendre** l'espace vectoriel E – ou est un **système générateur** de E – si et seulement si tout élément X de E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de G .

□ Exemple 1

Comme :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ peuvent s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble G_1 :

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est donc un système générateur de $\mathbb{R}^2$.

□ Exemple 2

De la même façon, les vecteurs de l'espace vectoriel $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, u_2 = 2u_1 \right\}$ rencontré plus haut sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$u_1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$E_1 = \left\{ u_1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'ensemble E_1 est donc engendré par le singleton $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

□ Exemple 3

On peut également montrer que l'ensemble G_2 :

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

est générateur de $\mathbb{R}^2$. Par définition, en effet, G_2 est générateur de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de G_2 , autrement dit, si, quel que soit le vecteur :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{R}^2$, il existe trois réels x_1, x_2, x_3 tels que :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le problème posé est donc celui de l'existence (ou non) de solutions au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Or, à la fin du chapitre précédent, on a vu que ce système a au moins une solution si et seulement si on a :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comme :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} = 2$$

(en effet le rang de cette matrice est inférieur ou égal à 2, son nombre de lignes, et ses deux premières colonnes forment une matrice triangulaire de rang 2),

et comme :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} = 2$$

(en effet, le rang de cette matrice est inférieur ou égal à son nombre de lignes et supérieur ou égal au rang de la matrice précédente puisque celle-ci est l'une de ses sous-matrices),

on peut donc conclure que ce système a au moins une solution et, en conséquence, que G_2 engendre $\mathbb{R}^2$.

De façon plus générale, on a :

PROPRIÉTÉ III-3

L'ensemble $\{C_1, \dots, C_n\}$ est générateur de E si et seulement si, quel que soit le vecteur U de E , on a (en adoptant l'écriture matricielle) :

$$\text{rang}(C_1 \quad \dots \quad C_n | U) = \text{rang}(C_1 \quad \dots \quad C_n).$$

Le concept de système générateur est très précieux au sens où il permet de « résumer » l'infinité de vecteurs contenue dans un espace vectoriel en un nombre fini de vecteurs. Ainsi, on l'a vu, l'infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ peut être déduite, par combinaison linéaire, de deux ou trois vecteurs (G_1 ou G_2). Cet exemple montre au passage qu'un espace vectoriel a plusieurs systèmes générateurs.

Fin de la semaine 5

Faire le Quiz intitulé « Quiz - Cours n° 5 »

Dans la préparation des TD, vous pouvez aller jusqu'à l'exercice 6 du dossier de TD 3

Le concept de système générateur, on l'a vu, permet de « résumer » l'infinité de vecteurs contenue dans un espace vectoriel en un nombre fini de vecteurs. En effet, si E est un espace vectoriel, alors l'ensemble des vecteurs de E peuvent s'écrire sous la forme de combinaisons linéaires de certains d'entre eux, qui en forment donc ce que l'on appelle un système générateur de E .

Mais ce concept est également **très utile pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel donné**. Soit, *par exemple*, l'ensemble :

$$E_3 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

On va ici voir que, comme E_3 est l'ensemble de *toutes les combinaisons linéaires* de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour démontrer cela, on utilise simplement la propriété III-1 vue plus haut. Cette démonstration se fait donc en trois étapes.

Etape 1 – On vérifie tout d'abord que l'ensemble E_3 est une partie non vide de $\mathbb{R}^3$.

Ce qui est vrai puisque,

- d'une part, elle contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$. En effet :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

- et, d'autre part, tous les éléments de E_3 sont des éléments de $\mathbb{R}^3$.

La propriété III-1 s'applique donc : l'ensemble E_3 est un espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si E_3 est *stable* pour la *somme vectorielle* et pour l'*homothétie*.

Etape 2 – On vérifie alors la stabilité de E_3 pour la somme vectorielle

Or E_3 est stable pour la somme vectorielle. Soit, en effet, deux éléments quelconques de E_3 :

$$U = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U' = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où α, β, α' et β' sont des réels. La somme de ces deux éléments est :

$$\begin{aligned} U + U' &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha + \alpha') \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (\beta + \beta') \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

C'est donc bien un élément de E_3 puisque c'est une combinaison linéaire des deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Etape 3 – On vérifie enfin la stabilité de E_3 pour l'homothétie

Comme :

$$\lambda U = \lambda \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est également un élément de E_3 quel que soit le réel λ , puisque c'est une combinaison linéaire des deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'ensemble E_3 est stable pour l'homothétie.

Ainsi, l'ensemble E_3 étant une partie non vide de $\mathbb{R}^3$ stable pour la somme vectorielle et l'homothétie, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est même plus précisément **le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par l'ensemble G** :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Plus généralement :

PROPRIÉTÉ III-4

L'ensemble engendré par un ensemble G de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
[propriété démontrée en annexe de ce cours]

Ou (cas général), l'ensemble engendré par un système G de vecteurs appartenant tous au même espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E sur $\mathbb{R}$.

De cette propriété, on déduit une méthode très rapide pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

METHODE

Pour démontrer qu'un ensemble E_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement d'un espace vectoriel E), il suffit de démontrer qu'il est engendré par un ou plusieurs vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (respectivement de E), autrement dit qu'il est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs.

Pour démontrer, par exemple, que l'ensemble $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, u_2 = 2u_1 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, il suffisait donc de remarquer (comme on l'a fait plus haut) que E_1 est l'ensemble des combinaisons linéaires d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$$E_1 = \left\{ u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_1 \in \mathbb{R} \right\},$$

puis de conclure qu'il s'agit donc du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Lorsque le système générateur est un singleton (un ensemble composé d'un unique vecteur), on parle d'ailleurs plutôt dans ce cas d'*homothétiques* d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$. E_1 est donc l'ensemble des homothétiques du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

II. Bases d'un espace vectoriel

On vient de voir que $\mathbb{R}^2$ était engendré (entre autres) par :

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\mathbb{R}^2$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de G_2 , ce que l'on peut écrire :

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Or G_2 est lié. Les trois vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ forment, en effet, une matrice de format $(2, 3)$ dont le rang est en conséquence inférieur ou égal à 2.

Pour savoir comment ces vecteurs colonnes sont liés, on peut appliquer la méthode du pivot aux colonnes la matrice formée par ces trois vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ C_1 & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ C_1 & C_2' & 2C_3' + C_2' \end{pmatrix}$$

On a donc (dernière colonne de cette dernière matrice) :

$$[1] \quad 2C_3' + C_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et comme $C_3' = C_3 - C_1$ et $C_2' = C_2 - C_1$, en remplaçant dans l'équation [1], on obtient :

$$2(C_3 - C_1) + (C_2 - C_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne :

$$-3C_1 + C_2 + 2C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou encore :

$$C_2 = 3C_1 - 2C_3.$$

On peut vérifier ce résultat sachant que $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$3C_1 - 2C_3 = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_2.$$

Si, maintenant, on remplace C_2 par $3C_1 - 2C_3$, autrement dit, on remplace $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par $3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, dans la définition de $\mathbb{R}^2$ comme ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de G_2 , on obtient :

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

Ce qui s'écrit également :

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \left[3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R} \right\},$$

Ou encore :

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ (\alpha + 3\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2\beta + \gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Or on peut noter ceci :

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

On en déduit que $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ est également un système générateur de $\mathbb{R}^2$.

Ainsi, si tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des trois vecteurs de G_2 (puisque G_2 engendre $\mathbb{R}^2$), il peut également s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des deux vecteurs de G_3 .

On se rend ainsi compte que, dans G_2 , le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ était superflu pour engendrer $\mathbb{R}^2$. Pourquoi ? Et bien tout simplement parce qu'il était lui-même une combinaison linéaire des deux autres vecteurs de G_2 .

En revanche, G_3 étant libre (puisque ses deux vecteurs ne sont pas proportionnels), il ne contient aucun vecteur superflu pour engendrer $\mathbb{R}^2$: si l'on ôte l'un des deux vecteurs de G_3 , on obtient un singleton, $G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ou $G_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, qui n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

Montrons-le pour G_4 .

On sait que G_4 engendre $\mathbb{R}^2$, si et seulement si (voir cours n°5), quel que soit le vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & | & u_1 \\ -1 & | & u_2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Or : $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ puisque cette colonne est non nulle ;

et $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ -1 & u_2 \end{pmatrix} = 2$ pour tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non proportionnels à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, par exemple $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On n'a donc pas $\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ -1 & u_2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ quel que soit le vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

Il s'ensuit que G_4 n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

Et, exactement de la même façon, on peut montrer la même chose pour G_5 . Faites-le !

Ici, comme les familles G_4 et G_5 sont des singletons, on pourrait raisonner plus simplement. En effet, une famille de vecteur engendre $\mathbb{R}^2$ si et seulement si tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ peuvent s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, G_4 engendre $\mathbb{R}^2$ si et seulement si tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont proportionnels à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ce qui n'est pas le cas. Il s'ensuit que G_4 n'engendre pas $\mathbb{R}^2$.

Finalement, G_3 étant libre, il ne contient aucun vecteur superflu pour engendrer $\mathbb{R}^2$. De tels systèmes générateurs — ne contenant aucun vecteur superflu parce qu'ils sont libres — sont ce que l'on appelle des *bases* d'un espace vectoriel.

A. Définition

Définition III.5

On dit qu'un ensemble $\mathcal{B}$ de vecteurs de l'espace vectoriel E est **une base de E** si et seulement si :

→ $\mathcal{B}$ engendre E

→ et $\mathcal{B}$ est libre (ses vecteurs sont linéairement indépendants).

Reprenons, par exemple, les quatre systèmes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dans le cours n°5, on a vu que G_1 et G_2 étaient deux systèmes générateurs de $\mathbb{R}^2$. Pour que ce soient des bases de $\mathbb{R}^2$, il faut donc qu'ils soient libres. Or ceci, on l'a vu plus haut, n'est pas le cas de G_2 , qui n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^2$. En revanche, G_1 est libre puisque ses deux vecteurs ne sont pas proportionnels. C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Il en va de même de G_3 qui, on vient de le voir, est générateur de $\mathbb{R}^2$ et libre.

En revanche, G_4 est bien libre, puisque son unique vecteur est non nul, mais il n'est pas générateur de $\mathbb{R}^2$. Donc G_4 n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Autre exemple : dans le cours n°5, on a vu que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ était un système générateur de l'espace vectoriel E_1 suivant :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, u_2 = 2u_1 \right\}.$$

Or G est libre puisqu'il ne contient qu'un seul vecteur, qui est non nul. Donc G est une base de E_1 .

Remarque :

$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^2$. De fait, tout vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme :

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la même façon, l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement l'ensemble des n vecteurs colonnes qui forment la matrice identité d'ordre n , $\mathbf{I}_n$, est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

B. Propriétés des bases

PROPRIÉTÉ III-5

Si tout vecteur de l'espace vectoriel E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de l'ensemble G , alors G est une base de E .

Cette propriété est démontrée en Annexe 1 à la fin de ce cours.

On peut montrer, par exemple, que tout vecteur :

$$X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de G ,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

et, en conséquence (*propriété III-5*), que G est une base de $\mathbb{R}^3$.

En effet, tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de G si et seulement si le système :

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

qui peut aussi être mis sous la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

a une solution unique.

Pour le savoir, appliquons la méthode du pivot à la matrice élargie :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & u_1 \\ 1 & -1 & 1 & u_2 \\ 1 & 1 & -1 & u_3 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

En choisissant la première ligne, L_1 , comme pivot et en remplaçant L_2 et L_3 respectivement par $L'_2 = L_2 + L_1$ et $L'_3 = L_3 + L_1$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 0 & 2 & u_1 + u_2 \\ 0 & 2 & 0 & u_1 + u_3 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1(\text{pivot}) \\ L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 + L_1 \end{matrix}$$

et, en permutant les deux dernières lignes de cette matrice (ce qui revient à changer l'ordre des équations du système) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 2 & 0 & u_1 + u_3 \\ 0 & 0 & 2 & u_1 + u_2 \end{array} \right) \begin{matrix} L_1(\text{pivot}) \\ L'_3 \\ L'_2 \end{matrix}$$

Le système à résoudre devient alors :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = u_1 \\ 2x_2 = u_1 + u_3 \\ 2x_3 = u_1 + u_2 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u_2 + u_3}{2} \\ x_2 = \frac{u_1 + u_3}{2} \\ x_3 = \frac{u_1 + u_2}{2} \end{cases}$$

Le système admet donc une solution unique et on peut en conclure que G est une base de $\mathbb{R}^3$.

PROPRIÉTÉ III-6 (réciproque de la propriété III-5)

Si l'ensemble G est une base de E , alors tout vecteur de l'espace vectoriel E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de G .

Cette propriété est démontrée en Annexe 2 à la fin de ce cours.

Ainsi, ayant vu plus haut que $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ était une base de $\mathbb{R}^2$, on sait, grâce à la propriété III-6 que tout vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de G_3 , autrement dit que le système d'équations linéaires :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

a une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et ce, quel que soit le vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

C. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Nous venons de voir qu'un ensemble $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel si (propriété III-5) et seulement si (propriété III-6) tout vecteur de cet espace peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de $\mathcal{B}$. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés *coordonnées de U dans la base $\mathcal{B}$* . Ainsi, si $\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_n\}$ et si $U = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$, alors les x_i sont les coordonnées de U dans $\mathcal{B}$, ce que l'on note :

$$U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Exemple

On a vu que $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ était une base de $\mathbb{R}^2$. Quel que soit le vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, le système d'équations linéaires :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

a une unique solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et cette solution donne les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dans la base G_3 .

Trouvons cette solution en appliquant la méthode du pivot au système :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dont la matrice élargie est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & u_1 \\ -1 & 1 & | & u_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & u_1 \\ 0 & 2 & | & u_1 + u_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \text{ (pivot)} \\ L'_2 = L_1 + L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u_1 - u_2}{2} \\ y = \frac{u_1 + u_2}{2} \end{cases}$$

Le système a donc pour unique solution :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1 - u_2}{2} \\ \frac{u_1 + u_2}{2} \end{pmatrix}$$

Cette solution donne les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dans la base G_3 , ce que l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1 - u_2}{2} \\ \frac{u_1 + u_2}{2} \end{pmatrix}_{G_3}.$$

Non, non, il n'y a pas d'erreur. Le G_3 en indice indique bien que ce sont les coordonnées dans $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Cette dernière égalité est donc une autre façon d'écrire :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{u_1 - u_2}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{u_1 + u_2}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce que vous pouvez vérifier¹.

Pour mieux comprendre ce dont il s'agit, nous allons considérer un vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ particulier.

Posons, par exemple, $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En fait, écrire $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sans autre précision, c'est dire que les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, puisque l'on a :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Plutôt que de prendre la base canonique, on peut prendre la base G_3 . On dit que l'on **change de base**. Et les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sont données par la solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous venons de déterminer cette solution. Il s'agit de :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1 - u_2}{2} \\ \frac{u_1 + u_2}{2} \end{pmatrix}$$

Avec $u_1 = 3$ et $u_2 = 1$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-1}{2} \\ \frac{3+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui signifie que les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base G_3 sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce que l'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{G_3}$$

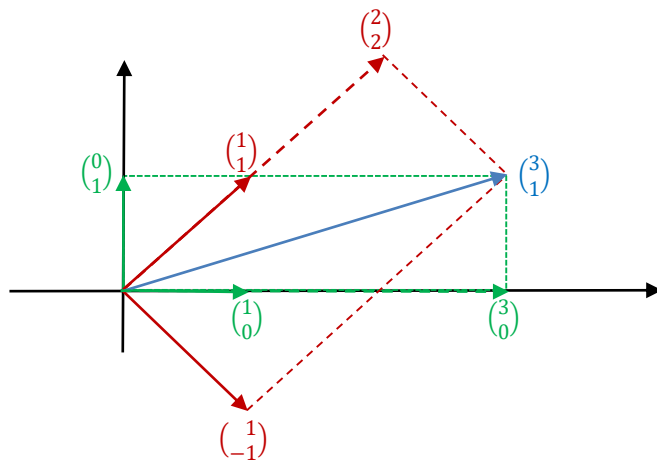
En fait, on a :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordonnées de $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Coordonnées de $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base G_3 .

Graphiquement, ce changement de base apparaît comme un changement de repère :



¹ On a bien : $\frac{u_1 - u_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{u_1 + u_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_1 - u_2}{2} + \frac{u_1 + u_2}{2} \\ \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{u_1 + u_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2u_1}{2} \\ \frac{2u_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$

- Dans le **repère vert** (base canonique), le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est tracé grâce au parallélogramme en **pointillés verts** en ajoutant $3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ à $1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Dans le **repère rouge** (base G_3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est tracé grâce au parallélogramme en **pointillés rouges** faisant la somme de $1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Fin de la semaine 6

Faire le Quiz intitulé « Quiz - Cours n° 6 »

Pour la préparation du TD, vous pouvez faire

les exercices 9 à 11 du dossier de TD 3

Annexe 1 - Démonstration de la propriété III-5

Enoncé de la propriété III-5 : si tout vecteur de l'espace vectoriel E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de l'ensemble G , alors G est une base de E .

Démonstration

Soit l'ensemble G de n vecteurs de E : $G = \{C_1, \dots, C_n\}$.

Si, tout vecteur de E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de G , alors G est un système générateur de E (par définition d'un système générateur).

G est donc une base de E si les vecteurs de G sont linéairement indépendants. Or, selon les hypothèses de la PROPRIÉTÉ III-5, le système :

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = \vec{0}$$

a pour unique solution :

$$\lambda_i = 0, i = 1, \dots, n.$$

En effet, $0C_1 + \dots + 0C_n = \vec{0}$ et, par hypothèse, $\vec{0}$ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de G .

Annexe 2 - Démonstration de la propriété III-6

Enoncé de la propriété III-6 : si l'ensemble G est une base de E , alors tout vecteur de l'espace vectoriel E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de G .

Démonstration (uniquement pour les experts)

Soit l'ensemble G de n vecteurs de E : $G = \{C_1, \dots, C_n\}$.

Comme G est un système générateur de E , tout vecteur X de E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de G . La propriété III-6 nous dit que si, en outre, G est un système libre, alors cette combinaison linéaire est unique.

Raisonnons par l'absurde et supposons que ce ne soit pas le cas, autrement dit qu'il existe un vecteur X de E pouvant s'écrire sous la forme de deux combinaisons linéaires différentes des vecteurs de G . On a donc :

$$[1] \quad X = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n$$

et

$$[2] \quad X = \mu_1 C_1 + \dots + \mu_n C_n$$

Si, tout vecteur de E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de G , alors G est un système générateur de E (par définition d'un système générateur).

G est donc une base de E si les vecteurs de G sont linéairement indépendants. Or, selon les hypothèses de la PROPRIÉTÉ III-5, le système :

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_n C_n = \vec{0}$$

a pour unique solution :

$$\lambda_i = 0, i = 1, \dots, n.$$

avec l'existence d'au moins un i tel que $\lambda_i \neq \mu_i$ (les deux combinaisons linéaires sont différentes).

En soustrayant [2] à [1], on obtient :

$$(\lambda_1 - \mu_1)C_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)C_n = \vec{0}$$

avec au moins un i , tel que $(\lambda_i - \mu_i) \neq 0$. Les vecteurs de G sont donc linéairement dépendants. Si donc ils sont linéairement indépendants, alors il n'existe pas de vecteur X de E pouvant s'écrire sous la forme de deux combinaisons linéaires différentes des vecteurs de G .

III. Dimension d'un espace vectoriel

On s'intéressera ici aux espaces vectoriels ayant au moins un système générateur comportant un nombre fini de vecteurs

A. Définition

Définition III.6

On appelle **dimension d'un espace vectoriel** E , le nombre, noté **dim** E , de vecteurs contenus dans n'importe laquelle de ses bases.

Le nombre de vecteur d'un ensemble $\mathcal{B}$, que l'on appelle **cardinal** de $\mathcal{B}$, est noté **card** $\mathcal{B}$.

Ainsi, si $\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_p\}$ est une base de l'espace vectoriel E , alors on a :

$$[1] \quad \dim E = \text{card} \mathcal{B} = p.$$

Ainsi, on a : $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et, plus généralement, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Autre exemple : dans le cours n°6, on a vu que $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ était une base de l'espace vectoriel E_1 suivant :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, u_2 = 2u_1 \right\}.$$

On a donc : $\dim E_1 = \text{card} G = 1$.

B. Propriétés

Remarque – Les démonstrations de cette partie étant relativement faciles et permettant de réviser les concepts vus précédemment, nous les avons laissées dans le corps du texte. Nous vous conseillons donc vivement de les travailler. Cependant, vous pouvez préparer les TD en vous contentant de comprendre les propriétés

Soit E , un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soit $\mathcal{B}$, une base d'un espace vectoriel E . Comme $\mathcal{B}$ est libre, on a :

$$\text{rang} \mathcal{B} = \text{card} \mathcal{B}.$$

En remplaçant dans l'équation [1] plus haut, il vient :

$$\dim E = \text{rang} \mathcal{B}.$$

D'où la propriété III-7.

PROPRIÉTÉ III-7

La dimension d'un espace vectoriel est égale au rang de n'importe laquelle de ses bases.

Lorsqu'un système générateur G d'un espace vectoriel E est lié, l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres, de sorte que l'on peut l'ôter au système de façon à former un autre système générateur G' du même espace vectoriel E , avec $\text{rang} G = \text{rang} G'$. Si G' est lié, on peut continuer et obtenir un autre système générateur G'' de E , avec $\text{rang} G = \text{rang} G' = \text{rang} G''$. Et l'on peut continuer ainsi jusqu'à l'obtention d'un système libre, $\mathcal{B}$, i.e. d'une base de E , avec, par construction : $\text{rang} G = \text{rang} \mathcal{B}$. Ainsi, tout système générateur de E contient une base de E , tous deux ayant le même rang. Réciproquement, toute base de E est un système générateur de E . D'où la propriété III-8.

PROPRIÉTÉ III-8

La dimension d'un espace vectoriel est égale au rang de n'importe lequel de ses systèmes générateurs.

PROPRIÉTÉ III-9

Soit E , un espace vectoriel de dimension p et soit $S = \{C_1, \dots, C_k\}$, un ensemble de k vecteurs de E . On a :
 $\text{rang} S \leq p$.

Démonstration de la propriété III-9

Soit $S = \{C_1, \dots, C_k\}$, un ensemble de k vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension p .

L'espace vectoriel E étant de dimension p , ses bases contiennent donc p vecteurs. Notons $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_p\}$ une de ces bases. On a ainsi :

$$\text{rang} \mathcal{B} = p,$$

et donc :

$$\text{rang}\{B_1, \dots, B_p, C_1, \dots, C_k\} = p$$

(en effet, comme $\mathcal{B}$ est une base de E , tout vecteur C_i de E peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$).

Il s'ensuit que :

$$\text{rang}\{C_1, \dots, C_k\} \leq p.$$

En fait, on applique déjà cette propriété depuis la section III du chapitre 2. Par exemple, quand on avait un matrice de format $(2, 3)$, du type :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

on concluait que les trois colonnes étaient **linéairement dépendantes**, parce que leur nombre était supérieur au nombre de lignes. En fait, comme la matrice a deux lignes, ses trois colonnes sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, la propriété III-9 nous dit que le rang de A est nécessairement inférieur ou égal à 2.

PROPRIÉTÉ III-10

Soit E , un espace vectoriel de dimension p et soit $S = \{C_1, \dots, C_k\}$, un ensemble de k vecteurs de E .
 Si $\text{rang} S = p$, alors S est générateur de E .

Démonstration de la propriété III-10**Etape 1 – rappel de la propriété III-3**

$S = \{C_1, \dots, C_k\}$ engendre E si et seulement si, quel que soit le vecteur U de E , on a :

$$\text{rang}(C_1 \ \cdots \ C_k | U) = \text{rang}(C_1 \ \cdots \ C_k)$$

C'est donc cette égalité que l'on doit démontrer pour démontrer que S engendre E .

Pour ce faire, on doit partir du fait que : $\text{rang} S = p$.

Etape 2

Si $\text{rang} S = \text{rang}(C_1 \ \cdots \ C_k) = p$, alors :

$$[1] \quad \text{rang}(C_1 \ \cdots \ C_k | U) \geq p.$$

Etape 3

Comme $C_1, \dots, C_k$ et U sont des vecteurs de E , un espace vectoriel de dimension p , en raison de la propriété précédente (III-9), on sait que :

$$[2] \quad \text{rang}(C_1 \ \cdots \ C_k | U) \leq p.$$

Etape 4

De [1] et [2], on déduit que :

$$\text{rang}(C_1 \ \cdots \ C_k | U) = p$$

et donc (puisque $\text{rang} S = p$) que :

$$\text{rang}(C_1 \ \cdots \ C_k | U) = \text{rang}(C_1 \ \cdots \ C_k).$$

Ce qu'il fallait démontrer pour démontrer que S engendre E .

Cette propriété permet de trouver très facilement des systèmes générateurs d'espaces vectoriels dont on connaît la dimension. Reprenons, par exemple, la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ses colonnes sont des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, dont la dimension est 2.

Or, les deux lignes de $\mathbf{A}$ n'étant pas proportionnelles, on a : $\text{rang} \mathbf{A} = 2$.

De la propriété III-10, on peut donc déduire que l'ensemble S composé par les trois colonnes de $\mathbf{A}$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

est un système générateurs de $\mathbb{R}^2$.

PROPRIÉTÉ III-11

Soit E , un espace vectoriel de dimension p .

Si $\mathcal{B}$ est un ensemble libre de p vecteurs de E , alors $\mathcal{B}$ est une base de E .

Démonstration de la propriété III-11

Comme $\mathcal{B}$ est libre et contient p vecteurs, on a : $\text{rang} \mathcal{B} = p$.

Comme $\mathcal{B}$ est un ensemble de vecteurs de E et que $\text{rang} \mathcal{B} = p$, alors (en raison de la propriété précédente : III-10), $\mathcal{B}$ engendre E .

$\mathcal{B}$ étant libre et générateur de E , c'est une base de E .

PROPRIÉTÉ III-11 BIS (CAS PARTICULIER)

Tout ensemble libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, pour savoir si un ensemble de vecteurs est une base de $\mathbb{R}^n$, il suffit de vérifier :

- qu'il contient n vecteurs ;
- que tous ses vecteurs appartiennent à $\mathbb{R}^n$;
- que cet ensemble est libre (autrement dit que ses vecteurs sont linéairement indépendants).

Considérons, par exemple, l'ensemble $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

- il contient 3 vecteurs ;
- ses vecteurs appartiennent à $\mathbb{R}^3$;
- cet ensemble est libre, puisque ses vecteurs forment la matrice triangulaire ne comportant aucun 0 sur sa diagonale principale suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ l'ensemble S forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

C. Dimension, base et solutions d'un système d'équations linéaires

Soit le système d'équations linéaires :

$$[1] \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{U}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice carrée régulière d'ordre n à éléments réels ; où $\mathbf{X}$ et $\mathbf{U}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On peut montrer que les n colonnes de $\mathbf{A}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$

Les n colonnes de $\mathbf{A}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Elles sont en outre linéairement indépendantes puisque $\mathbf{A}$ est régulière. Elles forment donc (propriété III-11 bis) une base de $\mathbb{R}^n$. Notons cette base $\mathcal{B}_A$.

On peut alors en déduire que le système [1] a une solution unique

Comme $\mathcal{B}_A$ est une base de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur U de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique des vecteurs de $\mathcal{B}_A$. Autrement dit, quel que soit le vecteur U de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur X de $\mathbb{R}^n$ solution de l'équation $AX = U$: le système [1] a une solution unique.

On peut enfin déterminer aisément cette solution

La matrice A étant régulière, elle est inversible : A^{-1} existe. D'où :

$$AX = U \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}U \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}U \Rightarrow I_n X = A^{-1}U \Rightarrow X = A^{-1}U.$$

La solution du système [1] est donc : $X = A^{-1}U$.

Elle donne les coordonnées du vecteur U dans la base $\mathcal{B}_A$.

Considérons, par exemple, le système :

$$[2] \quad BX = U$$

$$\text{Avec } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cours n°3, on a vu que B était inversible et que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

On peut maintenant dire les choses comme suit :

- B étant une matrice régulière d'ordre 3 à éléments réels, ses colonnes forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
- la solution du système [2] est en conséquence unique.
- cette solution, $X = B^{-1}U$ donne les coordonnées de U dans la base $\mathcal{B}$.

On a vu dans le cours n°3 que lorsque $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, alors :

$$X = B^{-1}U = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées du vecteur U dans la base $\mathcal{B}$ sont donc : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et on peut écrire $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

IV Bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$

A. Le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition III.7

Le **produit scalaire** de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une opération qui, à deux éléments $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, associe le réel :

$$U * V = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

ou encore, en adoptant l'écriture matricielle, le scalaire $U'V$, où U' est la transposée de U .

Ainsi, par exemple, le produit scalaire des deux vecteurs :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

est :

$$U_1 * U_2 = 1(-3) + 2(0) + 3(2) = 3.$$

En adoptant, cette fois, l'écriture matricielle, le produit scalaire de U_1 et de $U_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est :

$$U_1' U_3 = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times 3 = -1.$$

En procédant de même, le produit scalaire des deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$(1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1(0) + 0(1) = 0.$$

De la définition du produit scalaire de vecteurs (ou de matrices) colonnes de même format découlent immédiatement un certain nombre de propriétés. En particulier :

PROPRIÉTÉ III-12 – Le produit scalaire est commutatif, ce qui signifie que, quels que soient les vecteurs U et V de $\mathbb{R}^n$, on a : $U * V = V * U$.

PROPRIÉTÉ III-13 – quels que soient les vecteurs U et V_i de $\mathbb{R}^n$ et les réels λ_i ($i = 1, \dots, p$), on a :

$$U * (\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_p V_p) = \lambda_1 U * V_1 + \dots + \lambda_p U * V_p.$$

B. Norme d'un vecteur

Un cas particulier intéressant de produit scalaire est celui d'un vecteur $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ avec lui-même. On a alors :

$$U * U = u_1^2 + \dots + u_n^2.$$

Cette expression est toujours positive et ne s'annule que si $U = \vec{0}$. On note $\|U\|$ sa racine carrée et on l'appelle **norme euclidienne** (ou tout simplement **norme**) de U . On a donc :

$$\|U\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}.$$

Ainsi, par exemple, les normes des vecteurs :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sont-elles respectivement :

$$\|X_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \quad \text{et} \quad \|X_2\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

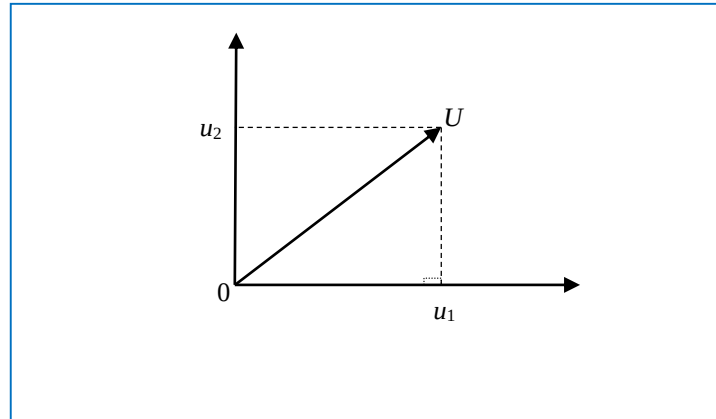
De la définition de la norme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on déduit immédiatement :

PROPRIÉTÉ III-14 – Quel que soit le vecteur U de $\mathbb{R}^n$ et le réel λ , on a : $\|\lambda U\| = |\lambda| \times \|U\|$

En effet :

$$\|\lambda U\| = \sqrt{(\lambda u_1)^2 + \dots + (\lambda u_n)^2} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = |\lambda| \times \|U\|.$$

Le nombre $\|U\|$ s'interprète comme la longueur du segment $[OU]^1$. En effet, dans le cas où $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, u_1 et u_2 étant les coordonnées de U dans un système d'axes, le segment $[OU]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont de longueurs respectivement égales à u_1 et u_2 (voir figure ci-dessous).



D'après le théorème de Pythagore, le carré de la longueur OU est donc égal à la somme des carrés de u_1 et de u_2 :

$$OU^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

On a donc bien :

$$OU = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \|U\| :$$

la norme du vecteur X est égale à la longueur du segment $[OU]$.

C. Vecteurs et espaces vectoriels orthogonaux

Définition III.8

On dit que deux vecteurs U et V sont **orthogonaux** (ce que l'on note $U \perp V$) lorsque leur produit scalaire est nul.

Les vecteurs :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } U_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

par exemple, sont orthogonaux, puisque l'on a :

$$U_1 * U_4 = 1(-1) + 2(-1) + 3(1) = 0.$$

Il en va de même les vecteurs U_1 et U_5 , avec :

$$U_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

puisque l'on a :

$$U_1 * U_5 = 1(2) + 2(-1) + 3(0) = 0.$$

Il s'ensuit que le vecteur U_1 est orthogonal à tout vecteur de la forme $\alpha X_4 + \beta X_5$, par exemple au vecteur :

$$U_6 = 2U_4 + U_5 = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

¹ On note $[OU]$ le segment joignant les points O et U , OU , la longueur du segment $[OU]$ et (OU) , la droite passant par les points O et U ,

Ce que l'on vérifie aisément : $U_1 * U_6 = 1(0) + 2(-3) + 3(2) = 0$.

Définition III.9

On dit qu'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est orthogonal à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ s'il est orthogonal à tout élément de cet espace vectoriel.

On vient de voir, par exemple, que le vecteur U_1 est orthogonal au sous-espace vectoriel A_1 de $\mathbb{R}^3$ engendré par U_4 et U_5 :

$$A_1 = \{\alpha U_4 + \beta U_5, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\},$$

mais c'est également le cas de tout vecteur de la forme γU_1 .

On peut également chercher à déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à un vecteur quelconque de cet espace vectoriel. Ainsi, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ orthogonal au vecteur U_2 rencontré plus haut est :

$$A_2 = \{U \in \mathbb{R}^3 / U_2 * U = 0\} \text{ avec } U_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Or, en posant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, on a :

$$U_2 * U = -3u_1 + 0u_2 + 2u_3.$$

Comme par hypothèse $U_2 * U = 0$, les vecteurs de A_2 sont tels que $u_1 = \frac{2u_3}{3}$: ce sont les vecteurs de la

$$\text{forme } \begin{pmatrix} 2u_3/3 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ orthogonal au vecteur U_2 est donc le sous-espace vectoriel engendré par la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Définition III.10

Deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si tout élément de l'un est orthogonal à tout élément de l'autre.

Ceci est le cas, on vient de le voir, des espaces vectoriels A_1 et A_3 , où $A_3 = \{\gamma U_1, \gamma \in \mathbb{R}\}$, ou encore des sous-espaces vectoriels A_2 et A_4 où $A_4 = \{\gamma U_2, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

D. Bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$

Définition III.11

Une **base** est dite **orthonormée** lorsque ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1.

Par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormée. En effet :

- Ses trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux, puisque :

$$(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- Ils sont en outre de norme unitaire, puisque :

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \text{ et } \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1. \text{ et.}$$

Et c'est aussi le cas des bases canoniques des espaces vectoriel de type $\mathbb{R}^n$ (quel que soit n).

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ n'est pas la seule base orthonormée de cet espace vectoriel. Tout ensemble de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1 est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Pour déterminer une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, on procède en trois étapes :

Etape 1 – on choisit un vecteur de $\mathbb{R}^3$, n'importe lequel² :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Etape 2 – on trouve deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, U_2 et U_3 , orthogonaux à U_1 et orthogonaux entre eux.

- On peut trouver U_2 directement. On voit assez facilement que si l'on pose $U_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$U_1 * U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(-2) + 1(2) + 2(1) = -4 + 4 = 0.$$

Ces deux vecteurs sont donc orthogonaux.

Si on ne « voit pas », on cherche un vecteur $U_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $U_1 * U_2 = 0$ autrement dit

vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

ou encore :

$$2x + y + 2z = 0.$$

Ce qui donne :

$$y = -2x - 2z.$$

On choisit alors une valeur pour x et une valeur pour z et on en déduit y .

- On cherche alors U_3 . C'est :
 - un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Il est donc de la forme : $U_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
 - orthogonal à U_1 et à U_2 (on garde le vecteur U_2 trouvé plus haut) Il vérifie donc le système d'équations :

$$S: \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 & (U_3 \text{ est orthogonal à } U_1) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 & (U_3 \text{ est orthogonal à } U_2) \end{cases}$$

Or :

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{matrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z/2 \\ y = -z \end{cases}$$

D'où $U_3 = \begin{pmatrix} -z/2 \\ -z \\ z \end{pmatrix}$, où z est un réel quelconque.

On choisit donc U_3 en choisissant une valeur de z .

Pour simplifier les calculs, on choisit ici : $z = 2$, ce qui donne : $U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a ainsi déterminé une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont orthogonaux deux à deux :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

² Nous avons choisi le nôtre de façon à ce que les calculs soient simples.

Etape 3 – on déduit de cette base $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$

Pour ce faire, on commence par déterminer les normes de ces trois vecteurs :

- $\|U_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$
- $\|U_2\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$
- $\|U_3\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$

Que faire ? Utiliser les propriétés vues plus haut.

- On sait tout d'abord que : $\|\lambda U\| = |\lambda| \cdot \|U\|$ (quel que soit le réel λ).
Notons $N > 0$ la norme du vecteur U non nul, on aura alors $\left\| \frac{1}{N} U \right\| = \left| \frac{1}{N} \right| \cdot \|U\| = \frac{1}{N} \times N = 1$: en multipliant un vecteur de la base par l'inverse de sa norme, on obtient un vecteur de norme unitaire qui lui est homothétique on conserve donc la propriété d'être orthogonal aux deux autres vecteurs de la base.

On a calculé $\|U_1\| = 3$, on va donc remplacer dans la base le vecteur U_1 par son homothétique

$$\frac{1}{3} U_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Et il en va de même des vecteurs $\frac{1}{\|U_2\|} U_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\|U_3\|} U_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$

- Or on sait que : $U \perp V \Rightarrow U \perp \lambda V$ (quel que soit le réel λ). Les trois vecteurs $\frac{1}{\|U_1\|} U_1$, $\frac{1}{\|U_2\|} U_2$ et $\frac{1}{\|U_3\|} U_3$ sont donc orthogonaux deux à deux à l'image des vecteurs U_1 , U_2 et U_3 .

Ainsi :

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

On peut ainsi trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

MÉTHODE POUR TROUVER UNE BASE ORTHONORMÉE DE $\mathbb{R}^n$

On construit une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (autrement dit un ensemble de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux deux à deux et de norme unitaire) en trois étapes.

Première étape – On choisit n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Deuxième étape – on trouve $n - 1$ autres vecteurs de $\mathbb{R}^n$, orthogonaux avec ce premier vecteur et orthogonaux deux à deux ;

Troisième étape – On divise chacun des n vecteurs par sa norme (pour que le résultat ne soit pas trop indigeste, il est préférable de choisir les vecteurs de façon à ce que leur norme soit relativement simple).

Les vecteurs colonnes d'une base orthonormée forment ce que l'on appelle une matrice orthogonale.

Définition III.12

On appelle **matrice orthogonale** une matrice dont les colonnes sont orthogonales deux à deux et de norme égale à 1.

Fin de la semaine 7

Faire le Quiz intitulé « Quiz - Cours n°7 »

Dans la préparation du TD, vous pouvez terminer le dossier de TD 3.