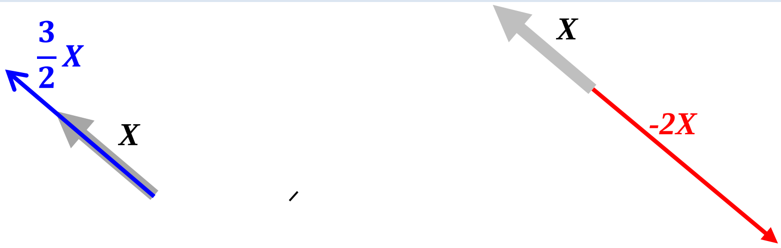
Corrigé du TD n°3

Espaces vectoriels dans ℝ

EXERCICE 1.

1.

a.

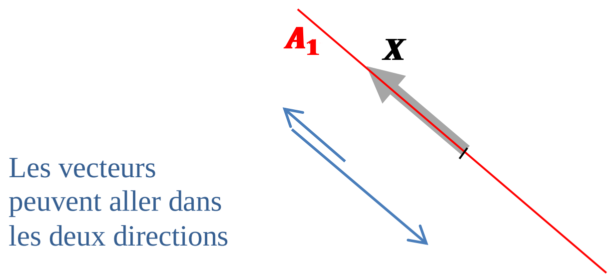


Vecteur colinéaire allant dans la même direction dont la longueur vaut $\frac{3}{2} \times$ la longueur de X

Vecteur colinéaire allant dans la direction opposée et dont la longueur vaut $2 \times$ la longueur de X

Ces vecteurs appartiennent à E car le produit d'un vecteur de E par un réel est un vecteur de E.

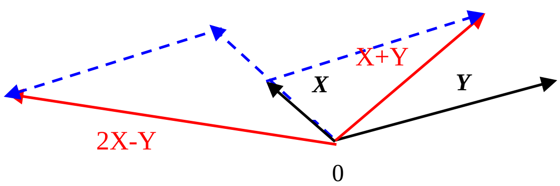
b.



C'est un espace vectoriel (toute somme de deux vecteurs de A est un vecteur de A et le produit d'un vecteur de A par un réel est un vecteur de A). Remarque : toute droite passant par l'origine est un espace vectoriel.

c. $A_2 = \{\alpha X, \alpha \geq 0\}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaire à X **et** allant dans la **même direction** que X.
Ce n'est pas un espace vectoriel : par exemple, le produit du vecteur $\boldsymbol{X}$ par le réel -1 n'appartient pas à A_2.

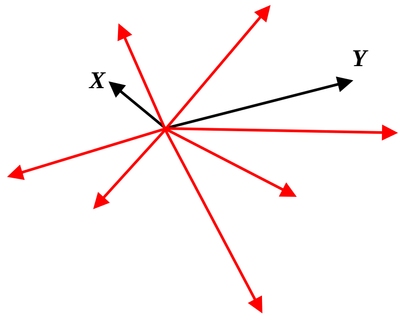
2.
a. Représenter graphiquement les vecteurs $X + Y$, $2X - Y$. Ces vecteurs appartiennent-ils à E ?



Ces vecteurs appartiennent à E car

- le produit d'un vecteur de E par un réel est un vecteur de E.
- la somme de deux vecteurs de E est un vecteur de E

b. Représenter graphiquement l'ensemble $B_1 = \{\alpha X + \beta Y, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$. Est-ce un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?



$B_1 = \{\alpha X + \beta Y, \alpha \in \mathrm{IR}, \beta \in \mathrm{IR}\}$: est le plan vectoriel engendré par les vecteurs X et Y. C'est un espace vectoriel. La somme de deux vecteurs de ce plan est un vecteur de ce plan. Et le produit d'un vecteur du plan B_1 par un réel est un vecteur de ce plan.

EXERCICE 2 (*FACULTATIF*)

1. Si X_0 et X_1 sont deux solutions du système $\mathbf{M}X = \vec{0}$, alors on a :

$$\mathbf{M}X_0 = \vec{0} \text{ et } \mathbf{M}X_1 = \vec{0}.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbf{M}(X_0 + X_1) = \mathbf{M}X_0 + \mathbf{M}X_1 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$

et que :

$$\mathbf{M}(\alpha X_0) = \mathbf{M}\alpha X_0 = \alpha\mathbf{M}X_0 = \alpha\vec{0} = \vec{0},$$

Les vecteurs $X_0 + X_1$ et αX_0 sont donc solution du système $\mathbf{M}X = \vec{0}$.

Propriété. *Toute partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E sur $\mathbb{R}$ si elle est stable pour la somme vectorielle et l'homothétie.*

- Les vecteurs X solutions du système $\mathbf{M}X = \vec{0}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble S de ces solutions est donc une partie de $\mathbb{R}^3$.
- Il n'est pas vide puisqu'il contient au moins le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ (en effet $\mathbf{M}\vec{0} = \vec{0}$).
- Il s'ensuit qu'il est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ s'il est stable pour la somme vectorielle et l'homothétie, ce qui est vrai puisque, on vient de le voir, d'une part, la somme de deux vecteurs X_0 et X_1 de S est un élément de S (stabilité pour la somme vectorielle) et, d'autre part, le produit d'un vecteur X_0 de S par un réel α est un élément de S (stabilité pour l'homothétie).

2. Raisonnons de même.

- L'ensemble S des vecteurs X solutions de l'équation $\mathbf{M}X = U$ (où U est un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$) est une partie de $\mathbb{R}^3$.
- Une condition nécessaire pour que S soit un sous=espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est qu'il contienne au moins le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$. Il faut donc que : $\mathbf{M}\vec{0} = U$.
  Comme $\mathbf{M}\vec{0} = \vec{0}$, l'ensemble S des solutions de $\mathbf{M}X = U$ (où U est un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$) ne peut donc être un espace vectoriel que si $U = \vec{0}$. Or si U est le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, l'équation de cette question est la même que celle de la question précédente.

$\Longrightarrow$ La seule condition pour que l'ensemble S des solutions de l'équation $\mathbf{M}X = U$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est donc : $U = \vec{0}$.

EXERCICE 3

1. $A = \left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\right\}$

2. Cet ensemble est-il stable pour la somme vectorielle ? pour l'homothétie (produit d'un vecteur de A par un réel) ? Que pouvez-vous en déduire ?

- *Stabilité pour la somme vectorielle*

A est stable pour la somme vectorielle si et seulement si :

$$\forall X_1 \in A \text{ et } \forall X_2 \in A, \text{alors } X_1 + X_2 \in A$$

C'est-à-dire si la somme de deux combinaisons linéaires des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ *est une combinaison linéaire de ces mêmes vecteurs.*

Si $X_1 \in A$, cela signifie, par définition de A, qu'il existe deux réels α_1 et β_1 tels que :

$$X_1 = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

De même, si $X_2 \in A$, il existe deux réels α_2 et β_2 tels que :

$$X_2 = \alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$X_1 + X_2 = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = (\alpha_1 + \alpha_2)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + (\beta_1 + \beta_2)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

La somme de deux réels étant un réel, $X_1 + X_2$ est de la forme :

$$X_1 + X_2 = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

C'est donc un élément de A : on en conclut que A est stable pour la somme vectorielle.

- *Stabilité pour l'homothétie*

A est stable pour l'homothétie (ou produit d'un vecteur de A par un réel) si et seulement si :

$$\forall X \in A, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{alors } \lambda X \in A$$

c'est-à-dire si le produit d'une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ *par un réel est une combinaison linéaire de ces mêmes vecteurs.*

Si $X \in A$, alors il existe deux réels α_1 et β_1 tels que :

$$X = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'on a, quel que soit le réel λ :

$$\lambda X = \lambda\left[\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right] = (\lambda\alpha_1)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + (\lambda\beta_1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Le produit de deux réels étant un réel, λX est de la forme :

$$\lambda X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

C'est donc un élément de A : on en conclut que A est stable pour l'homothétie.

A est une partie de $\mathbb{R}^3$ (puisque, $\mathbb{R}^3$ étant un espace vectoriel, les combinaisons linéaires de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$) non vide (puisqu'il contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ pour $\alpha = \beta = 0$) stable pour la somme vectorielle et l'homothétie. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$.

3. A est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs (voir B_1 dans l'exercice 1). C'est une partie des vecteurs de $\mathbb{R}_3$.
Attention : les vecteurs de A ont 3 éléments et donc, même s'il s'agit d'un plan, les vecteurs de A **ne sont pas** des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Au terme de cet exercice, on peut rappeler la propriété générale :

Tout ensemble engendré par un ensemble G de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Et remarquer que, pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on pourra appliquer cette propriété plutôt que de refaire la démonstration que l'on vient de faire.

EXERCICE 4

1.

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ 2x - y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ y = 2x + z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x + z \\ z \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les éléments de B_1 sont donc les combinaisons linéaires des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. On va directement appliquer la propriété suivante :

Tout ensemble engendré par un ensemble G de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

B_1 est l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$. Il est donc engendré par l'ensemble G_1 formé de ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Il s'ensuit que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- ***Ensemble B_2***

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ 2x - y + z = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ y = 2x + z - 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x + z - 1 \\ z \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les éléments de B_2 ne forment pas l'ensemble de <u>toutes</u> les combinaisons linéaires de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. B_2 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Plus simple : on peut remarquer que le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ n'appartient pas à B_2 car $\vec{0}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ne vérifie pas la condition d'appartenance à B_2 : puisque $2\times 0 - 0 + 0 \neq 1$. Or c'est une condition nécessaire pour que B_2 (qui est une partie de $\mathbb{R}^3$) soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- ***Ensemble B_3***

$$B_3 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ 2x-y+z=0 \text{ et } x+z=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ 2x-y+z=0 \text{ et } z=-x\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, y = x \text{ et } z=-x\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\x\\-x\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Les éléments de B_3 sont donc les homothétiques du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ (ce qui est un cas particulier de combinaison linéaire). On peut en déduire que B_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 5 (*FACULTATIF*)

1. $$C = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4,\ x+y-z=0 \text{ } et \text{ } y+z+t=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4,\ z=x+y \text{ } et \text{ } t=-x-2y\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\\-x-2y\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\right\}$$

Les éléments de C sont les combinaisons linéaires des deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$.

2. Par propriété, C étant l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

EXERCICE 6 – Les ensembles de vecteurs suivants sont-ils libres ou liés ?

$S_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ $rangS_1 = \text{rang}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ $= \text{rang}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix} = 2 = cardS_2 \Longrightarrow S_1$ est libre.	La matrice triangulaire obtenue par la méthode du pivot ne comporte aucun zéro sur sa diagonale principale. Elle est donc de plein rang.
$S_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ $rangS_2 = 2 < cardS_2 \Longrightarrow S_1$ est lié.	S_2 contient S_1 donc son rang est supérieur ou égal à $rangS_1$ =2. Les vecteurs de S_2 appartiennent à $\mathbb{R}^2$, donc le rang de S_2 est inférieur ou égal à 2.
$S_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ $rangS_3 = 1 < cardS_3 \Longrightarrow S_1$ est lié.	Les deux vecteurs de S_3 sont proportionnels
$S_4 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ S_4 est lié car l'un de ses vecteurs est le vecteur nul.	
$S_5 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$	S_5 est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Si l'on n'a pas encore introduit les bases, faire apparaître la matrice diagonale d'ordre 3 ne

$rangS_5 = 3 = cardS_5 \Longrightarrow S_5$ est libre.	comportant aucun 0 sur sa diagonale principale.
$S_6 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\text{Rang}S_6 = \text{rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&2\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}$ $= \text{rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&3&1\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}L_1 \text{ (pivot)}\\L'_2 = L_2 - L_1\\L_3\end{array}$ $=\text{rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&3&1\\0&0&-5\end{pmatrix}\begin{array}{l}L_1\\L'_2 (2^{nd} \text{ pivot})\\L''_3 = 3L_3 - 2L'_2\end{array}$ $rangS_6 = 3 = cardS_6 \Longrightarrow S_6$ est libre.	La matrice triangulaire obtenue par la méthode du pivot ne comporte aucun zéro sur sa diagonale principale. Elle est donc de plein rang.
$S_7 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\text{Rang}S_6 = \text{rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&2&6\\-1&2&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}$ $= \text{rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&4&4\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}L_1 \text{ (pivot)}\\L'_2 = L_2 - 2L_1\\L'_3 = L_3 + L_1\end{array}$ $=\text{rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&4&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}L_1\\L'_2 (2^{nd} \text{ pivot})\\L''_3 = 4L'_3 - L'_2\end{array}$ $rangS_7 = 2 < cardS_7 \Longrightarrow S_7$ est lié.	La matrice triangulaire obtenue par la méthode du pivot comporte un zéro sur sa diagonale principale. Elle est donc singulière et $rangS_7 \leq 2$. Or les deux premiers vecteurs de S_7 ne sont pas proportionnels.
$S_8 = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $rangS_8 = rang\begin{pmatrix}2&2&6\\-1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = rangS_7$ $rangS_8 = 2 < cardS_8 \Longrightarrow S_8$ est lié.	On retrouve les mêmes lignes que dans la matrice formée par les vecteurs de S_7, mais dans le désordre
$S_9 = = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ $rangS_9 = rang\begin{pmatrix}2&2&6\\-1&2&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = rangS_7$ $rangS_9 = 2 < cardS_9 \Longrightarrow S_9$ est lié.	S_9 est la transposée de S_7

EXERCICE 7

- ***Ensemble B_1***

B_1 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$engendré par le système $G_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Les vecteurs de G_1 sont linéairement indépendants (*deux vecteurs sont linéairement indépendants s'ils ne sont pas proportionnels).*

G_1 est un système libre et générateur de B_1 : c'est donc une base de B_1.

On en déduit que $dimB_1 = cardG_1 = 2$ (*car la dimension d'un espace vectoriel est égal au nombre de vecteurs d'une de ses bases).*

- ***Ensemble B_3***

B_3 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$engendré par le système $G_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$.

Le vecteur de G_3 est linéairement indépendant (*un vecteur est linéairement indépendants s'il est différent du vecteur nul).*

G_3 est un système libre et générateur de B_3 : c'est donc une base de B_3.

On en déduit que $dimB_3 = cardG_3 = 1$.

EXERCICE 8.

On note $\mathcal{L}(S_i)$ l'espace vectoriel engendré parS_i.

- S_1 est un système libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (dont la dimension est 2). S_1 est donc une base de $\mathbb{R}^2$ (L'ensemble $\mathcal{L}(S_1)$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$).
- S_2 est un système lié de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (dont la dimension est 2) qui contient S_1, une base de $\mathbb{R}^2$. S_2 engendre donc $\mathbb{R}^2$ (L'ensemble $\mathcal{L}(S_2)$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$).
- S_3 est un système lié de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Ce n'est donc ni une base ni un générateur de $\mathbb{R}^2$ (de dimension 2).

  Comme : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, les combinaisons linéaires des vecteurs de S_3 sont également des combinaisons linéaires du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le système $G'' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est donc générateur de $\mathcal{L}(S_3)$.

  Comme il est libre, c'est une base de $\mathcal{L}(S_3)$ et dim $\mathcal{L}(S_3)$ = cardG'' = 1.

OU

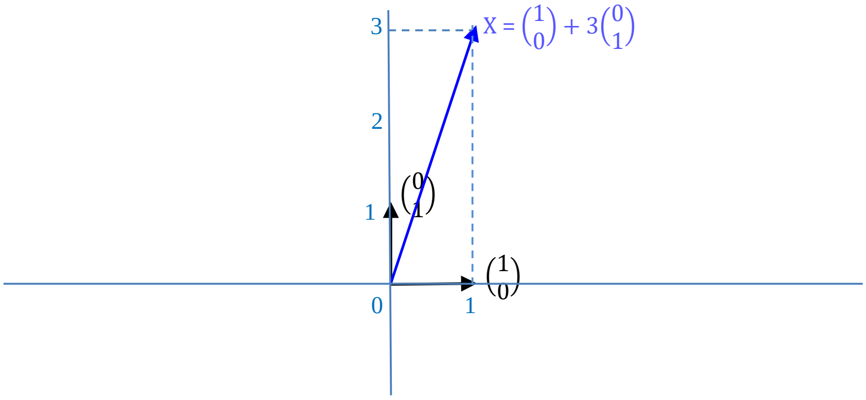
Comme dim $\mathcal{L}(S_3)$ = rangS3 = 1, les bases de $\mathcal{L}(S_3)$ comportent un seul vecteur. Tout vecteur non nul de $\mathcal{L}(S_3)$ fait l'affaire, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

□ S_5 est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $L(S_5)$ est donc $\mathbb{R}^3$ et dim $\mathcal{L}(S_5)$ = 3.

□ S_7 est un système de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, mais qui sont linéairement dépendants. Ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$. Dim $\mathcal{L}(S_7)$ = rangS_7 = 2 (voir exercice 6). Tout ensemble composé de deux vecteurs linéairement indépendants de S_7 – par exemple les deux premiers vecteurs de S_7, qui ne sont pas proportionnels – est donc une base de $L(S_7)$.

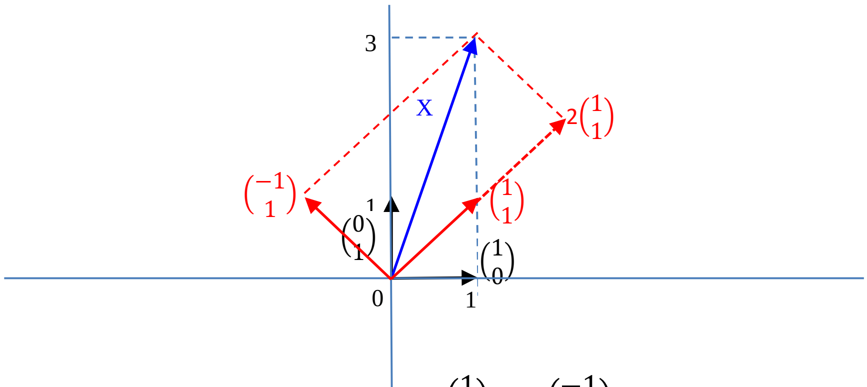
EXERCICE 9

1. $X=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ où $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.



2.

a.



b. On a construit le vecteur X en faisant $X=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur X dans la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ sont donc bien données par le vecteur $U=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 10

1.

- Coordonnées de $X=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ dans la base B_1

On résout le système : $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

On voit immédiatement que

$$X=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

On en déduit que les coordonnées du vecteur X dans la base B_1, qui est la ***base canonique de*** $\mathbb{R}^3$, sont données par le vecteur $X_1=X$: *les éléments d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donnent ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

- Coordonnées de $X=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ dans la base B_2

On résout le système $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+z_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

On peut remarquer directement que $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, sinon, on résout par la méthode du pivot et on obtient $\begin{cases}x_2 = 1\\ y_2 = 1.\\ z_2 = 1\end{cases}$

On en déduit que les coordonnées du vecteur X dans la base B_2 sont données par le vecteur $X_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. Coordonnées de $X = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ dans la base B_3 :

On résout le système $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow X = A_3X_3$ avec $A_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_2\end{pmatrix}$

On voit immédiatement que $\begin{cases}x_3 + y_3 + z_3 = 2\\ x_3 + y_3 = 1\\ x_3 = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z_3 = 1\\ y_2 = -2\\ x_3 = 3\end{cases}$

On a donc $\boldsymbol{X} = 3 \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et on en déduit que les coordonnées du vecteur X dans la base B_3 sont données par le vecteur $X_2 = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 11

Soit l'ensemble de vecteurs $G = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Tout système libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Le système G, composé de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, est donc une base de $\mathbb{R}^3$ s'il est libre, autrement dit si son rang est égal à 3. Or :

$$rang G = rang\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix} = rang\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}L'_1 = L_2\\L'_2 = L_1\\L_3\end{matrix} = rang\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}L'_1\\L'_2\\L'_3 = L_3 - L'_1\end{matrix}$$
$$= rang\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}L'_1\\L'_2\\L''_3 = L'_3 - L'_2\end{matrix} = 3$$

Conclusion : G est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Comme les colonnes de la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ forment une base (que l'on notera B) de $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de peut $\mathbb{R}^3$ s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire unique de ces colonnes.

Le système $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a donc une solution unique.

3. L'unique solution $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ du système $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ donne les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ quelconque dans la base B.

La matrice élargie de ce système est : $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$

En appliquant la méthode du pivot dans l'ordre habituel, il vient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1' = L_2 \\ L_2' = L_1 \\ L_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & z-y \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1' \\ L_2' \\ L_3' = L_3 - L_1' \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & -2 & z-y-x \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1' \\ L_2' \\ L_3'' = L_3' - L_2' \end{array}$$

.

On a donc :

$$\begin{cases} a + 0b + c = y \\ 0a + b + c = x \\ 0a + 0b - 2c = z - y - x \end{cases},$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} a = \frac{-x+y+z}{2} \\ b = \frac{x-y+z}{2} \\ c = \frac{x+y-z}{2} \end{cases}.$$

4. Ecrire le résultat sous la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, où $\mathbf{A}$ est une matrice de format (3 , 3).

$$\begin{cases} a = \dfrac{-x+y+z}{2} \\ b = \dfrac{x-y+z}{2} \\ c = \dfrac{x+y-z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z \\ b = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z \\ c = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5.

$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc : $\mathbf{A} = \mathbf{B^{-1}}$.

6. Comme $\mathbf{B}$ est de plein rang, et donc inversible, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{B^{-1}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbf{B^{-1}\,B}}_{\mathbf{I_3}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{B^{-1}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

EXERCICE 12

Soit la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A : Résolution de systèmes et coordonnées d'un vecteur dans une base

1. Les colonnes de **M** sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Or, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ si ils sont linéairement indépendants. On vérifie donc que rang$\mathbf{M} = 3$.

$$\text{Rang}\mathbf{M} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3' = L_3 + 2L_2 \end{matrix} = 3$$

(la dernière matrice est triangulaire d'ordre 3 et ne comporte aucun zéro sur sa diagonale principale).

2. Comme les colonnes de **M** forment une base de $\mathbb{R}^3$, le système admet une solution unique.

3. La matrice **M** est de plein rang et donc elle est est-elle inversible.

4. Posons $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

La matrice élargie du système $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & u_1 \\ -1 & 0 & 2 & u_2 \\ 2 & 0 & 1 & u_3 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2. \\ L_3 \end{matrix}$

En appliquant la méthode du pivot, on obtient $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & u_1 \\ -1 & 0 & 2 & u_2 \\ 0 & 0 & 5 & u_3 + 2u_2 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2\ (pivot) \\ L_3' = L_3 + 2L_2 \end{matrix}$.

On a donc $\begin{cases} x_2 = u_1 \\ -x_1 + 2x_3 = u_2 \\ 5x_3 = u_3 + 2u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}u_2 + \frac{2}{5}u_3 \\ x_2 = u_1 \\ x_3 = \frac{2}{5}u_2 + \frac{1}{5}u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

On en déduit que $\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

On peut aussi résoudre sous forme entièrement matricielle en posant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

On pose alors la matrice élargie $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$ et on applique la méthode du pivot à plusieurs reprise de manière à faire apparaître la matrice identité dans la partie gauche de cette matrice élargie

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1' = L_1 - L_2 \\ L_2\ (\text{pivot}) \\ L_3' = L_3 + 2L_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1' (2^{\text{nd}}\ \text{pivot}) \\ L_2' = L_2 + L_1' \\ L_3'' = 0{,}2L_3' \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L''_1 = L'_1 - L'_2 + 2L''_3 \\ L'_2 \\ L''_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

5. On en déduit que la solution du système $\mathbf{M}X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est $X = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. La matrice **N** étant de plein rang, elle est inversible. On peut donc écrire le système :

$$\mathbf{N}X = U \Leftrightarrow \mathbf{N^{-1}N}X = \mathbf{N^{-1}}U \Leftrightarrow X = \mathbf{N^{-1}}U$$

Le système admet donc comme solution unique le vecteur $X = \mathbf{N^{-1}}U$

Partie B : Bases orthonormées

1. $C_1 * C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times 0 = 0$; C_1 et C_2 sont donc orthogonaux.

$C_1 * C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times 0 + (-1) \times 2 + 2 \times 1 = 0$; C_1 et C_3 sont donc orthogonaux.

$C_2 * C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 0$; C_2 et C_3 sont donc orthogonaux.

2. Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à C_1 sont les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

Or : $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 0 \times x - 1 \times y + 2 \times z = 0 \Rightarrow y = 2z$

Tous les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont donc orthogonaux à C_1.

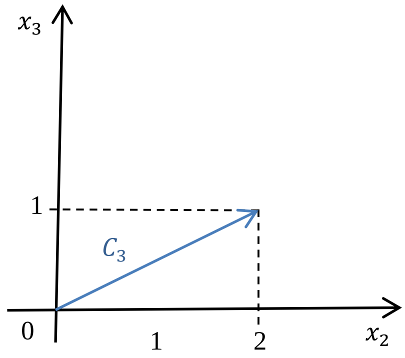
L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à C_1 est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

3. $\|C_1\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$;

$\|C_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$;

$\|C_3\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1\text{^}2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

4. On peut représenter C_3 dans le repère $(0\,, x_2\,, x_3)$ puisque $x_1 = 0$.



D'après le théorème de Pythagore, la norme de C_3 représente sa longueur (la somme des carrés des deux côtés est égale au carré de l'hypoténuse)

5. Pour déterminer, à partir du système $B_1 = \{C_1\,,\ C_2\,, C_3\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, il suffit de diviser les coordonnées de chacun des vecteurs par sa norme.

On en déduit la base orthonormée $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right\}$ et la matrice orthogonale

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

6. La matrice inverse d'une matrice orthogonale est égale à sa transposée. On en déduit :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 (FACULTATIF – *adaptation d'un exercice de comptabilité nationale de L1*) —

1. Montrer que la matrice **M** des coefficients techniques s'écrit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Un coefficient technique, noté $c_{i,j}$ est le ratio de la consommation intermédiaire de produit i par la branche j, notée $CI_{i,j}$ et de la production de la branche j, notée P_j.

Interprétation : pour produire une valeur de 200 Mds d'euros, la branche agriculture (colonne 1 du tableau des entrées intermédiaires) utilise pour 50 Mds d'euros de produits industriels (deuxième ligne de cette colonne qui correspond aux produits industriels. Cette consommation intermédiaire représente 25% de la valeur produite par la branche.

Ici, on a noté, par hypothèse

- la production agricole sur la ligne 1, la production industrielle sur la ligne 2 et la production de services sur la ligne 3

- les CI de la branche Agriculture sur la colonne 1, celles de la branche Industrie sur la colonne 2 et celle de la branche Services sur la colonne 3

Par exemple, la branche 1 (agriculture) utilise 50 de produits 2 (produits industriels) pour produire 200 : $c_{2,1} = \frac{CI_{2,1}}{P_1} = \frac{50}{200} = 0{,}25$

Pour chaque colonne de la matrice, on utilise les CI de la colonne correspondante que l'on divise par la production de cette même branche

On retrouve bien la matrice **M** des coefficients techniques :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{50}{200} & \frac{50}{500} & \frac{0}{1000} \\ \frac{50}{200} & \frac{100}{500} & \frac{250}{1000} \\ \frac{0}{200} & \frac{100}{500} & \frac{500}{1000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}25 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

2. La production de chaque branche aux prix d'acquisition est $P + E = total\ ressources$

   Ces ressources sont employées soit comme consommations intermédiaires $CI = MP$, soit comme emplois finals F.

   On a bien, par équilibre entre emplois et ressources : $P + E = \mathbf{M}P + F$.

3. On peut écrire $P - \mathbf{M}P = F - E \Leftrightarrow (\mathbf{I}_3 - \mathbf{M})P = F - E \ \Leftrightarrow \mathbf{A}P = F - E$ avec :

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}8 & -0{,}25 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

4. Soit la matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 2{,}3 \end{pmatrix}$.

   $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}8 & -0{,}25 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 2{,}3 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3$. Donc $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

   On a $\boldsymbol{A}P = F - E \Leftrightarrow \mathbf{BA}P = \mathbf{B}(F - E) \ \Leftrightarrow P = \boldsymbol{B}(F - E)$.

   En effet, comme $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, on a : $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_3$.

5. A partir de la situation initiale et en supposant que les coefficients techniques et les écarts de prix sont constants, estimer les effets sur la production de chacune des branches d'une augmentation de 100 de la consommation finale de produits industriels.

   Dans la situation initiale, on a :

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}(F - E) = \boldsymbol{B}\left[\begin{pmatrix} 120 \\ 340 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 240 \\ -100 \end{pmatrix}\right] = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}$$

   Dans la situation finale, on a :

$$\begin{pmatrix} p_A \\ p_I \\ p_S \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 100 \\ \mathbf{200} \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 2{,}3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ \mathbf{200} \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 650 \\ 1060 \end{pmatrix}$$

6. Ecrire le TES correspondant à la situation finale (chiffres arrondis à l'unité).

On a déterminé les productions nécessaires à un nouvel équilibre. En ajoutant E, qui rend compte de l'écart entre prix de base et prix d'acquisition, on peut remplir la colonne « total ressources ».

Il faut ensuite recalculer les consommations intermédiaires en appliquant les coefficients techniques aux nouvelles quantités produites. Par exemple, la branche 1 (agriculture), pour produire 220 unités utilise $0{,}25 \times 220 = 55$ unités de produits 2 (produits industriels). On déduit en sommant par ligne le total des consommations intermédiaires par produit.

Enfin, en dernier lieu, on peut calculer le total des CI par branche et en déduire la valeur ajoutée de la branche. Par exemple, dans la branche 1, le total de CI est de 110, la production de 220, et donc la valeur ajoutée de 220-110=110.

	Tableau des ressources					Tableau des entrées intermédiaires				Tableau des emplois finals
Produit	Production (P)	MC+MP (*)	IP-SP (**)	**Total ressources**	Branche / Produit	A	I	S	**Total consommations intermédiaires *(CI)***	**Total emplois finals (*F*)**
A	**220**	19	1	**240**	A	55	65	0	**120**	**120**
I	**650**	131	109	**990**	I	55	130	265	**450**	**440**
S	**1060**	-150	50	**960**	S	0	130	530	**660**	**300**
Total	1700	0	160	1860	Total CI branches	110	325	795	**1230**	**860**
				Valeur Ajoutée Brute		110	325	265	700	
				Production		220	650	1060	1930	