Objectif : Savoir mobiliser les lois discrètes classiques

Ex 1. Les appels téléphoniques arrivent à la fréquence de 48 par heure au bureau de réservation de la compagnie Regional Airways.

1) Calculez la probabilité de recevoir trois appels dans un intervalle de 5 minutes.

Ici, on s'interroge sur la probabilité de recevoir trois appels dans un intervalle de 5 minutes. C'est donc du comptage, et on utilisera la loi de Poisson. Pour ce faire, on a besoin de connaître l'espérance du nombre d'appels sur une période donnée. Puisque l'on a une fréquence d'appels de 48 par heure, cela signifie que, si l'on nomme X la variable du nombre d'appels sur cette période :

$$\mathbb{E}(X) = 48/h$$

On veut maintenant cette même fréquence, mais pour 5 minutes. 5 minutes représentent $\frac{1}{12}$ d'une heure, donc on a, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{12}\right) = \frac{48}{12}/5mn = 4/5mn$$

On reçoit donc, en moyenne, 4 coups de fil par intervalles de 5 minutes. On peut donc utiliser la loi de Poisson, pour laquelle le paramètre λ représente l'espérance de X. On a donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda = 4)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \forall k \in \mathbb{N}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{4^3 e^{-4}}{3!} = 0{,}1953$$

Ainsi, la probabilité de recevoir trois appels dans un intervalle de 5 minutes est de presque 20%.

2) Calculez la probabilité de recevoir exactement 10 appels en 15 minutes.

On veut maintenant cette même fréquence, mais pour 15 minutes. 15 minutes représentent $\frac{1}{4}$ d'une heure, donc on a, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{4}\right) = \frac{48}{4}/15mn = 12/15mn$$

On reçoit donc, en moyenne, 12 coups de fil par intervalles de 15 minutes. On peut donc utiliser la loi de Poisson, pour laquelle le paramètre λ représente l'espérance de X. On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 10) = \frac{12^{10} e^{-12}}{10!} = 0{,}1048$$

Ainsi, la probabilité de recevoir dix appels dans un intervalle de 15 minutes est de 10,5%.

3) Supposons qu'aucun appel ne soit actuellement en attente. Si l'agent prend 5 minutes pour traiter l'appel en cours, combien d'appels risquent d'être mis en attente pendant ce temps ? Quelle est la probabilité qu'aucun appel ne soit mis en attente ?

Ici, on imagine donc un opérateur venant de prendre la communication. Son appel durera 5 minutes. Durant ces 5 minutes, combien d'appels risquent d'être mis en attente ? On se resitue dans le cadre de la première question, puisque l'intervalle de temps est de 5 minutes. On veut donc connaître l'espérance du nombre d'appels que l'opérateur peut recevoir en 5 minutes. Nous l'avions établi à 4 en question 1 : $\mathbb{E}\left(\frac{X}{12}\right) = \frac{48}{12}/5mn = 4/5mn$.

Maintenant, on veut connaître la probabilité de ne recevoir aucun appel pendant ces 5 minutes. On reçoit, en moyenne, 4 coups de fil par intervalles de 5 minutes. On peut donc utiliser la loi de Poisson, pour laquelle le paramètre λ représente l'espérance de X. On a :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = 0{,}018$$

Ainsi, la probabilité qu'aucun appel ne soit mis en attente n'est que de 1,8%.

4) Si aucun appel n'est en cours de traitement, quelle est la probabilité que l'agent puisse prendre 3 minutes pour une pause sans être interrompu par un nouvel appel ?

La question est très similaire à la précédente, sauf que l'intervalle de temps est maintenant de 3 minutes. 3 minutes représentent $\frac{1}{20}$ d'une heure, donc on a, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{20}\right) = \frac{48}{20}/3mn = 2{,}4/3mn$$

On reçoit donc, en moyenne, 2,4 coups de fil par intervalles de 3 minutes. On peut donc utiliser la loi de Poisson, pour laquelle le paramètre λ représente l'espérance de X. On a donc :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2{,}4^0 e^{-2{,}4}}{0!} = 0{,}091$$

Ainsi, la probabilité de ne recevoir aucun appel dans un intervalle de 3 minutes est de 9%.

Ex 2. Un magasin reçoit en moyenne 3 réclamations par jour d'ouverture. En supposant que l'occurrence de ces réclamations suive une loi de Poisson, calculer la probabilité pour que le premier lundi de septembre, le magasin reçoive :

Notons tout d'abord que la mention « premier lundi de septembre » n'est présente que pour tester si les étudiants ont bien acquis qu'en l'absence de précision, la loi est la même toute l'année. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de réclamations reçues pendant un jour. D'après l'énoncé, on connaît l'espérance du nombre de réclamations par jour, soit $\mathbb{E}(X) = 3 = \lambda$. On a ici un comptage, donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda = 3)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{3^k e^{-3}}{k!}$$

1) 0 réclamation

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = 0{,}05$$

Ainsi, la probabilité qu'aucune réclamation ne soit enregistrée est de 5%.

2) 2 réclamations

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 0{,}224$$

Ainsi, la probabilité que deux réclamations soient enregistrées est de 22%.

3) Strictement plus de 4 réclamations

On demande ici la probabilité pour strictement plus de 4 réclamations. L'idée est donc de passer par l'inverse, soit $\mathbb{P}(X > 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4)$:

$$\mathbb{P}(X > 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4)$$
$$\Leftrightarrow 1 - \big(\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4)\big)$$
$$\Leftrightarrow 1 - e^{-3}\left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}\right) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X > 4) = 0{,}18$$

Ainsi, la probabilité que plus de 4 réclamations soient enregistrées est de 18%.

Ex 3. Sur une chaîne de production de batteries, on étudie un défaut très rare mais qui rend la batterie affectée dangereuse, avec un risque d'explosion. Des études ont montré que la probabilité d'observer cette défaillance est d'environ 1 sur 10 millions. Par ailleurs, l'apparition d'une défaillance sur une batterie est indépendante de son apparition sur une autre batterie. Le volume de production annuelle est de 40 millions de batteries. On cherche à connaître la probabilité que le nombre de batteries défaillantes produites dans une année soit au moins égal à 4 :

1) Montrer que l'on peut s'appuyer sur une loi de Poisson

On peut s'appuyer ici sur une approximation par une loi de Poisson, dans la mesure où la probabilité d'occurrence de l'évènement est rare (c'est le cas ici, avec une probabilité $p = 1/10\,000\,000$), et un nombre de répétitions suffisamment élevé (c'est aussi le cas ici, puisque l'on parle de 40 000 000 de batteries produites annuellement). On utilisera donc la loi de Poisson, en tant que loi des évènements rares.

2) Calculer la probabilité recherchée

Ici, on s'interroge sur la probabilité que le nombre de batteries défaillantes produites dans une année soit au moins égal à 4. Soit X la variable du nombre de batteries défaillantes sur une année. On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \left(\frac{1}{10\,000\,000}\right) \times 40\,000\,000 = 4$$

On a donc, en moyenne, 4 batteries défectueuses pour 40 000 000 de batteries produites. On peut donc utiliser la loi de Poisson, pour laquelle le paramètre λ représente l'espérance de X. On a donc $X \sim \mathcal{P}(\lambda = 4)$:

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \big(\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - e^{-4}\left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\right) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X \geq 4) = 0{,}57$$

Ainsi, la probabilité que le nombre de batteries défaillantes produites dans une année soit au moins égal à 4 est de 57%.

Ex 4. Un enquêteur téléphonique a observé lors de ses appels que lorsque la personne qui décrochait était une femme, celle-ci acceptait de répondre au sondage dans 2 cas sur 3. Lorsque le répondant était un homme, celui-ci refusait dans 3 cas sur 4. Sachant que sur 5 personnes appelées, 4 sont des hommes :

1) Calculer la probabilité qu'une personne appelée au hasard accepte de répondre au sondage

On considère les évènements :

R : « la personne appelée accepte de répondre »
F : « la personne appelée est une femme »

D'après l'énoncé, on sait que :

$$\mathbb{P}(R|F) = \frac{2}{3} \; ; \; \mathbb{P}(\bar{R}|\bar{F}) = \frac{3}{4} \; ; \; \mathbb{P}(\bar{F}) = \frac{4}{5}$$

On cherche ici la probabilité totale $\mathbb{P}(R)$, soit la probabilité de répondre d'une personne sélectionnée au hasard. Par les probabilités totales, et puisque le sexe représente une partition de l'univers :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \cap F) + \mathbb{P}(R \cap \bar{F}) = \mathbb{P}(R|F) \times \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(R|\bar{F}) \times \mathbb{P}(\bar{F})$$
$$= \frac{2}{3} \times \left(1 - \mathbb{P}(\bar{F})\right) + \left(1 - \mathbb{P}(\bar{R}|\bar{F})\right) \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3}$$

La probabilité qu'une personne appelée au hasard accepte de répondre au sondage est de $\frac{1}{3}$.

2) Calculer la probabilité que l'enquêteur doive appeler strictement plus de 10 personnes avant d'obtenir une réponse favorable. On traitera ce problème à l'aide d'une variable X dont on précisera la loi.

L'expérience consiste à contacter une personne pour l'interroger. Deux issues sont possibles : la personne accepte de répondre avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou refuse avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. On répète l'expérience de manière indépendante jusqu'à obtenir un succès (une personne accepte de répondre).

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes contactées pour obtenir une réponse favorable. X suit alors une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$: $X \sim \mathcal{G}\left(p = \frac{1}{3}\right)$. On a donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \; \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Ici, cela donne :

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}(X = i) = 1 - \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right) = 0{,}017$$

La probabilité que l'enquêteur doive appeler strictement plus de 10 personnes avant d'obtenir une réponse favorable est de 1,7%.

Ex 5. Lors d'un match de football, lorsque l'un des joueurs fait une faute dans la surface de réparation il y a *penalty*. On cherche à modéliser les *penalty* de façon probabiliste en supposant que les comportements des gardien et tireur sont complètement aléatoires (cette hypothèse est en fait relativement vraisemblable car le gardien doit s'élancer au moment même où le tireur frappe la balle s'il veut avoir une chance de l'arrêter).

Dans la version simplifiée d'un penalty, le gardien peut plonger :

- en haut à droite
- en bas à droite
- en haut à gauche
- en bas à gauche

Le tireur peut placer la balle :

- en haut à la droite du gardien
- en bas à la droite du gardien
- en haut à la gauche du gardien
- en bas à la gauche du gardien
- ou bien sûr tirer à côté

1) Donner G l'ensemble de choix possibles pour le gardien et T ceux du tireur. En déduire l'univers de l'expérience correspondant à un *penalty* (attention, l'expérience tient compte du gardien et du tireur).

L'ensemble de choix du gardien est $G = \{hd, bd, hg, bg\}$ avec la première lettre indiquant la hauteur (haut ou bas) et la deuxième le côté (droite ou gauche).

L'ensemble de choix du tireur est $T = \{hd, bd, hg, bg, c\}$ avec c représentant le cas où le tireur rate le cadre. En effet, en dehors de ce dernier cas, il peut placer la balle à droite en haut du gardien, en bas à droite du gardien, en haut à gauche du gardien ou en bas à gauche du gardien. On a donc l'univers Ω suivant :

$$\Omega = \mathrm{G} \times \mathrm{T} \Leftrightarrow |\Omega| = |\mathrm{G}| \times |\mathrm{T}| = |\{hd, bd, hg, bg\}| \times |\{hd, bd, hg, bg, c\}| = 20$$

2) En supposant que si le gardien choisit le même endroit que le tireur, il arrête le tir, écrire les évènements suivants :

   a. « le gardien plonge à droite »

Soit G_d l'évènement « le gardien plonge à droite ».

$$G_d = \{hd, bd\} \times T$$

   b. « le tireur ne tire pas en bas »

Soit T_{nb} l'évènement « le tireur ne tire pas en bas ».

$$T_{nb} = G \times (T \backslash \{bd, bg\}) = G \times \{hg, hd, c\}$$

c. « le gardien arrête le tir »

Soit A l'évènement « le gardien arrête le tir ». Cela arrive lorsque le tireur ne rate pas le cadre et que le gardien plonge au même endroit que le tireur, soit :

$$A = \{(hd, hd), (bd, bd), (hg, hg), (bg, bg)\}$$

c'est-à-dire les couples où le tireur et le gardien ont pris la même décision.

d. « le but n'est pas marqué mais le gardien n'a pas arrêté le tir »

Soit F l'évènement « le but n'est pas marqué mais ce n'est pas le gardien qui a arrêté le tir » : cela correspond à l'évènement « le tireur tire à côté », soit :

$$F = \{hg, hd, bg, bd\} \times \{c\}$$

3) On observe que la probabilité qui décrit bien cette situation est la probabilité uniforme. Montrer que l'évènement « le gardien plonge en bas à gauche » est indépendant de l'évènement « le tireur tire en bas à gauche ». Généraliser à l'ensemble des actions possibles du gardien et du tireur.

La probabilité qui décrit bien cette situation est uniforme. Donc on a $\mathbb{P}$ telle que :

$$\forall \omega \in G \times T, \ \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|G \times T|} = \frac{1}{20}$$

Cela implique également que :

$$\forall E \in G \times T, \ \mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{20}$$

Pour monter l'indépendance de ces deux évènements, on va donc calculer la probabilité de chacun d'entre eux ainsi que la probabilité de leur intersection.

Pour rappel, A et B sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On a avec A l'évènement « le gardien plonge en bas à gauche » : $A = \{bg\} \times T$, d'où :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{20} = \frac{1 \times 5}{20} = \frac{1}{4}$$

Pour B, l'évènement « le tireur tire en bas à gauche », $B = G \times \{bg\}$, d'où :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{20} = \frac{4 \times 1}{20} = \frac{1}{5}$$

Par ailleurs, $A \cap B$ qui correspond à l'évènement « le tireur tire en bas à gauche et le gardien plonge en bas à gauche » est $\{(bg, bg)\}$ et donc :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{20} = \frac{1}{20}$$

On a donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$: les évènements A et B sont indépendants.

Pour généraliser, on peut noter que, quelle que soit l'action a choisie par le gardien, l'évènement correspondant est $\{a\} \times T$ et, que quelle que soit l'action choisie par le tireur notée b, alors l'évènement correspondant est $G \times \{b\}$.

Et on a :

$$\mathbb{P}(\{a\} \times T) \times \mathbb{P}(G \times \{b\}) = \frac{5}{20} \times \frac{4}{20} = \frac{1}{20} = \mathbb{P}(\{a,\ b\})$$

et ce, quelles que soient les actions choisies par les deux joueurs.

4) Calculez la probabilité que le but soit marqué. Soit X la variable aléatoire du nombre de but marqué pour un *penalty*, quelle loi suit X ?

L'évènement M : « le but est marqué » est donné par l'union des ensembles tels que le tireur ne tire pas à côté et ne tire pas au même endroit que l'endroit où le gardien plonge, soit :

$$\begin{aligned} M = &(\{hg\} \times (T\backslash\{hg,\ c\})) \\ &\cup (\{hd\} \times (T\backslash\{hd,\ c\})) \\ &\cup (\{bg\} \times (T\backslash\{bg,\ c\})) \\ &\cup (\{bd\} \times (T\backslash\{bd,\ c\})) \end{aligned}$$

Les sous-ensembles de cette union sont disjoints et ont pour cardinal 3 (1×3 par le produit cartésien). On a donc :

$$\mathbb{P}(M) = \frac{|M|}{20} = \frac{4 \times (1 \times 3)}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

La séance de tirs au but peut donc être représentée par une loi de Bernoulli. En effet, chaque tir a une probabilité $p = \frac{3}{5}$ d'arriver au fond du filet. Ainsi, X le nombre de buts suit une loi de Bernoulli, $X \sim \mathcal{B}(p)$, avec le paramètre $p = \frac{3}{5}$, $X = 1$ étant un succès, et $X = 0$ étant un échec.

5) Lors d'une séance de tirs au but, chaque équipe tire 5 *penalty*. En supposant que les résultats des *penalty* sont indépendants (hypothèse assez peu réaliste), quelle loi suit le nombre de buts marqués par une équipe pour une séance de tirs au buts ?

Il s'agit de la somme de 5 épreuves de Bernoulli indépendantes (et identiquement distribuées), et de même paramètre de succès p. Ainsi, le nombre de *penalty* marqués suit une loi binomiale, $X \sim \mathcal{B}(n,\ p)$, de paramètres $p = \frac{3}{5}$ (probabilité de succès) et $n = 5$ (nombre de répétitions).

$$\mathbb{P}(X = k) = C_5^k \frac{3^k}{5}\left(1 - \frac{3}{5}\right)^{5-k},\ \forall k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ 5\}$$

Comme dans la question précédente, il faut tenir compte du fait que l'expérience porte sur le couple gardien et tireur.

Ex 6. Soit X une variable aléatoire désignant le nombre de pannes qu'un service après-vente d'une grande enseigne doit gérer par semaine. La loi de probabilité de X est donnée par :

x	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}_X(x)$	4/9	2/9	1/9	1/9	1/9

Soit Y la variable aléatoire désignant le coût hebdomadaire du service de dépannage pour l'enseigne. Ce coût est composé d'un coût fixe de 500 euros et d'un coût variable lié au nombre de pannes traitées, soit 200 euros/panne.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y

La variable aléatoire Y peut s'écrire :

$$Y = 500 + 200X$$

Ainsi, son support est $Y(\Omega) = \{500, 700, 900, 1100, 1300\}$, et la loi de Y est donnée par les probabilités d'occurrence suivantes :

$$\mathbb{P}(Y = 500) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{4}{9} \text{ ; } \mathbb{P}(Y = 700) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{9} \text{ ; }$$

$$\mathbb{P}(Y = 900) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{9} \text{ ; } \mathbb{P}(Y = 1100) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(Y = 1300) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{9}$$

2) Calculer l'espérance et l'écart-type de Y de deux manières différentes, en vous appuyant respectivement sur la loi de X et la loi de Y.

En passant par la loi de X, on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{9} = \frac{11}{9}$$

Par la relation de König-Huygens, on obtient :

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{4}{9} + 1^2 \times \frac{2}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} + 3^2 \times \frac{1}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} = \frac{31}{9}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \frac{31}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 = \frac{158}{81}$$

On en déduit ainsi les moments de la variable Y :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(500 + 200X) = 500 + 200\mathbb{E}(X) = 500 + 200 \times \frac{11}{9} = \frac{6700}{9}$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(500 + 200X) = 200^2\mathbb{V}(X) = 200^2 \times \frac{158}{81} = \frac{6320000}{81}$$

par linéarité de l'espérance, et par le fait que la variance est un opérateur quadratique, non-influencé par l'ajout d'une constante.

On en déduit :

$$\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}(Y)} = 279{,}33$$

En passant par la loi de Y, on a :

$$\mathbb{E}(Y) = 500 \times \frac{4}{9} + 700 \times \frac{2}{9} + 900 \times \frac{1}{9} + 1100 \times \frac{1}{9} + 1300 \times \frac{1}{9} = \frac{6700}{9}$$

Par la relation de König-Huygens, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y^2) = 500^2 \times \frac{4}{9} + 700^2 \times \frac{2}{9} + 900^2 \times \frac{1}{9} + 1100^2 \times \frac{1}{9} + 1300^2 \times \frac{1}{9} = \frac{5690000}{9}$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \left(\mathbb{E}(Y)\right)^2 = \frac{5690000}{9} - \left(\frac{6700}{9}\right)^2 = \frac{6320000}{81}$$

Ex 7. Récapituler les différentes lois de probabilité abordées dans les dossier 5 et 6, en résumant leurs conditions d'application sous forme de tableau.