CHAPITRE II

MATRICES ET SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

On va voir dans ce chapitre qu'il est possible de savoir si un système d'équations linéaires a des solutions et, le cas échéant, s'il en a une ou plusieurs, sans résoudre ledit système. Pour ce faire, nous utiliserons la représentation matricielle du système. C'est donc cette représentation que nous allons étudier dans ce chapitre. Nous allons également y introduire la notion fondamentale de rang.

I. Représentation matricielle d'un système d'équations linéaires

Reprenons le système S_2 résolu dans le chapitre précédent :

$$S_2 \begin{cases} x - y + z = -1 & L_1 \\ -x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ 2x + y - 2z = -5 & L_3 \end{cases}.$$

Comme tous les systèmes d'équations linéaires, ce système peut s'écrire sous une **forme matricielle** de la façon suivante :

$$S_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}}.$$

PRINCIPE DU PASSAGE D'UNE ECRITURE A L'AUTRE

Le passage d'une écriture à l'autre est montré ci-dessous à l'aide de codes couleur et de légendes :

$$S_2 \begin{cases} x - y + z = -1 & L_1 \\ -x + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ 2x + y - 2z = -5 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times x - 1 \times y + 1 \times z = -1 & L_1 \\ -1 \times x + 2 \times y + 2 \times z = 0 & L_2 \\ 2 \times x + 1 \times y - 2 \times z = -5 & L_3 \end{cases}$$

3 équations donc 3 lignes

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

3 inconnues donc 3 colonnes

Le système S_2 peut donc s'écrire ainsi :

$$S_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Cette écriture présente le double avantage d'être plus synthétique — puisqu'elle évite la répétition des variables et du signe « = » — et de séparer les éléments de natures différentes dans trois tableaux de nombres — appelés **matrices** — distincts :

- la **matrice des coefficients** du système :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

- la **matrice** *colonne* **des seconds membres** :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix};$$

qualifiée ainsi car ne comportant qu'une seule colonne ;
- la **matrice** colonne **des variables du système** :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Les symboles désignant ces variables n'ayant pas grande importance (au sens où l'ensemble des solutions reste inchangé lorsqu'on remplace x, y et z, par x_1, x_2 et x_3, ou par α, β et γ, par exemple), tous les éléments qui caractérisent le système S_2 peuvent être regroupés dans une matrice unique :

$$(\mathbf{A}|\mathbf{U}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

appelée **matrice élargie** du système, dans laquelle une barre verticale sépare les coefficients (à gauche) des éléments du second membre (à droite).

Lorsque le système est ainsi présenté, la méthode du pivot consiste à « triangulariser » la partie gauche de la matrice élargie en y faisant apparaître des zéro. C'est ce qui apparaît ci-dessous où les différentes étapes de la résolution de S_2 sont reprises, à gauche, sous la forme de systèmes (comme dans le chapitre précédent), et à droite, sous la forme de matrices élargies :

$$S_2 \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = -5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \qquad (\mathbf{A}|\mathbf{U}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$S_2' \begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + 3z = -1 \\ 3y - 4z = -3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \\ L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 2L_1 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

$$S_2'' \begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + 3z = -1 \\ -13z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \\ L_2' \\ L_3'' = L_3 - 3L_2' \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

Fin du cours de la semaine 1 – travail à effectuer

- **Faire le Quiz intitulé « Quiz - Cours n°1 »**
- **Préparer le TD 1**

Si vous êtes en difficulté (par exemple pour préparer le TD), des exercices du même type sont disponibles :

- ***Sur l'EPI (exercices complémentaires du chapitre I)***
- ***Dans le manuel (Gun & Jallais, 2018, p. 33-38).***

Complément de cours, en cas de besoin ou envie : (Gun & Jallais, 2018, Chapitre I)

II. Les matrices

A. Présentation

Définitions II.1

Les **matrices** sont des tableaux de nombres du type :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

m lignes

n colonnes

i, le 1[er] indice, donne le n° de la ligne,
j, le 2[nd] indice, donne le n° de la colonne.

On peut également les noter:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}),$$

où a_{ij} est l'élément de **A** se situant à l'intersection de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et de sa $j^{\text{ème}}$ colonne, $i = 1, \ldots, m$ (lignes), $j = 1, \ldots, n$ (colonnes).

On dit que la matrice est de format $(m\,,\,n)$, le **format d'une matrice** **A** étant le couple :
(nombre de lignes de **A** , nombre de colonnes de **A**).

Quelques exemples :

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A_5} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sont cinq matrices, la première de format (3 , 2), la deuxième de format (2 , 3), la troisième de format (3 , 4), la quatrième de format (3 , 1), la cinquième de format (1 , 4).

Plus généralement, on a vu que les matrices de format $(m\,,\,1)$, ne comportant donc qu'une colonne comme $\mathbf{A_4}$, s'appellent des **matrices colonnes**, alors que les matrice de format $(1\,,\,n)$, ne comportant donc qu'une ligne comme $\mathbf{A_5}$, s'appellent des **matrices lignes**.

B. Quelques matrices particulières

En raison de leur forme particulière, certaines matrices sont très utiles. On les rencontrera d'ailleurs souvent par la suite.

1. Matrices nulles

Définition II.2

Les **matrices nulles** de format $(m\,,\,n)$ sont les matrices, notées $\mathbf{0}_{m,n}$, composées uniquement de 0.

C'est par exemple le cas des matrices suivantes :

$$\mathbf{0}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{0}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{0}_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Matrices opposées

Définition II.3

Soit une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$, de format $(m\,,n)$.
On appelle **opposée** de **A**, la matrice, notée $-\mathbf{A}$, dont les éléments sont les opposées des éléments de **A.** Cette matrice est donc de format (m, n) et on a :

$$-\mathbf{A} = (-a_{ij}).$$

Par exemple les deux matrices suivantes sont opposées :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}.$$

3. Matrices transposées

Définition II.4

Soit une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$, de format $(m\,,n)$.
On appelle **transposée** de **A**, la matrice, notée $\mathbf{A}'$, dont les colonnes sont formées par les lignes de **A.** Cette matrice est donc de format (n, m) et on a :

$$\mathbf{A}' = (a'_{ij}), \text{ avec } a'_{ij} = a_{ji}.$$

Par exemple, la transposée de la matrice **M** :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

est la matrice $\mathbf{M}'$:

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sous-matrices

Définition II.5

Soit une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$, de format $(m\,,n)$.
On appelle **sous-matrice** de **A**, toute matrice obtenue en ôtant à A une ou plusieurs de ses lignes ou colonnes.

Par exemple la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a plusieurs sous-matrices, parmi lesquelles les matrices :

- $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ obtenue en ôtant à **A** sa première ligne et sa première colonne ;
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ obtenue en ôtant à A sa deuxième ligne ;
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue en ôtant à A sa troisième colonne et ses deux dernières lignes.

5. Matrices carrées

Définition II.6

Les **matrices carrées** sont des matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes.
Elles sont donc de la forme :

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \text{ où } i = 1, \dots, n\,;\, j = 1, \dots, n.$$

Ainsi, les matrices :

$$\mathbf{A_5} = (2), \mathbf{A_6} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{A_7} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

sont des matrices carrées.

***Définitions* II.7**

Pour les matrices carrées, on ne parle pas de format, mais d'**ordre**, une matrice carrée d'ordre n étant une matrice comportant n lignes et n colonnes.

On appelle **diagonale principale** d'une matrice carrée sa diagonale nord-ouest/sud-est. La diagonale principale de la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ est donc formée des termes a_{ii}.

On appelle **trace** d'une matrice carrée $\mathbf{A}$, la somme, notée $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, des termes situés sur sa diagonale principale :

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}.$$

La matrice $\mathbf{A_7} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, par exemple,

- est d'ordre 4 ;
- sa diagonale principale est encadrée en orange
- sa trace est : $\mathrm{tr}(\mathbf{A_7}) = 0 - 3 + 6 - 4 = -1$.

6. Matrices triangulaires

***Définitions* II.8**

Les **matrices triangulaires** sont des matrices carrées ne comportant que des 0 en dessous ou au-dessus de leur diagonale principale.

Plus précisément :

- Une **matrice triangulaire supérieure** est une matrice carrée ne comportant que des 0 en dessous de sa diagonale principale. Elle est donc de la forme :
$$\mathbf{T}_{inf} = (a_{ij}), \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$
- Une **matrice triangulaire inférieure** est une matrice carrée ne comportant que des 0 au-dessus de sa diagonale principale. Elle est donc de la forme :
$$\mathbf{T}_{sup} = (a_{ij}), \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i < j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

Les matrices

$$\mathbf{T_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{T'_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

par exemple, sont triangulaires respectivement supérieure et inférieure.

L'application de la méthode du pivot à la matrice élargie du système S_2 (au début de ce chapitre) :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right),$$

et c'était d'ailleurs son but, a fait apparaître une matrice triangulaire supérieur à gauche de la barre verticale :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right)$$

C'est la raison pour laquelle on parle de « triangulariser » un système lorsqu'on lui applique la méthode du pivot, ce que l'on fait, d'ailleurs, y compris lorsque la matrice des coefficients du système n'est pas carrée.

7. Matrices diagonales

Définition II.9

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les termes sont nuls, à l'exception éventuelle de ceux situés sur sa diagonale principale (appelés termes diagonaux). C'est donc une matrice de la forme :

$$\mathbf{D} = (a_{ij}), \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

C'est par exemple le cas des deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : une matrice *diagonale* est triangulaire supérieure et inférieure.

8. Matrice identité d'ordre *n*

Définition II.10

On appelle **matrice identité d'ordre *n***, notée $\mathbf{I}_n$, la matrice diagonale d'ordre n dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. On a donc :

$$\mathbf{I}_n = (a_{ij}), \text{ avec } a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } a_{ij} = 1 \text{ si } i = j \ (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n).$$

Ainsi les matrices suivantes sont-elles des matrices identité :

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{etc.}$$

9. Matrices scalaires

Définitions II.11

On appelle **matrice scalaire**, une matrice de la forme $\mathbf{S_n} = \lambda\mathbf{I_n}$, où λ est un réel quelconque. On a donc $\mathbf{S}_n = (a_{ij})$, avec $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ij} = \lambda$ si $i = j$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$).

C'est par exemple le cas des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

10. Matrices symétriques

Définition II.12

Une **matrice symétrique** est une matrice égale à sa transposée. C'est donc une matrice **A** telle que :

A = **A'**.

C'est par exemple le cas des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Matrices antisymétriques

Définition II.13

Une **matrice antisymétrique** est une matrice dont la transposée est égale à son opposée. C'est donc une matrice **A** telle que :

$$\mathbf{A}' = -\mathbf{A}.$$

C'est par exemple le cas des deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

C. Opérations sur les matrices

1. Somme de deux matrices de même format (m , n)

PRINCIPE DE LA SOMME DE DEUX MATRICES

La somme de deux matrices n'est possible que si celles-ci sont de même format et s'effectue en additionnant les éléments qui sont à la même place (sur la même ligne et la même colonne), comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-3) & 1+0 \\ -2+(-1) & 2+2 \\ 0+\ \ 1 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut ainsi définir la somme de deux matrices de format (m , n) de la façon suivante :

Définition II.12

La somme des deux matrices de format (m , n), **A** = (a_{ij}) et **B** = (b_{ij}), est la matrice :

C = **A** + **B** = (c_{ij}) avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

La somme de deux matrices de format $(m\,,n)$ a plusieurs propriétés.

PROPRIETES DE LA SOMME DE DEUX MATRICES DE FORMAT $(M\,,N)$

S_1 – Elle est **commutative**. Ceci signifie que, quelles que soient les matrices **A** et **B** de format $(m\,,n)$, on a :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

S_2 – Elle est **associative**. Ceci signifie que, quelles que soient les matrices **A**, **B** et **C** de format $(m\,,n)$, on a :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$

S_3 – Elle a un **éléments neutre** : la matrice nulle de format $(m\,,n)$ que l'on notera $\mathbf{0}_{m,n}$. Ceci signifie que, quelle que soit la matrice **A**, on a :

$$\mathbf{A} + \mathbf{0}_{m,n} = \mathbf{0}_{m,n} + \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

S_4 – Tout matrice **A** de format $(m\,,n)$ a **une opposée pour la somme**, notée **– A**. Et on a :

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = -\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{0}_{m,n}.$$

S_5 – La **transposée de la somme de deux matrices est égale à la somme des transposées** de ces deux matrices. Autrement dit, quelles que soient les matrices **A** et **B** de format $(m\,,n)$, on a :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'.$$

En posant, par exemple : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

on a vu que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on définit les transposées $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

On a donc : $\mathbf{A}' + \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, soit $\mathbf{A}' + \mathbf{B}' = (\mathbf{A} + \mathbf{B})'$.

2. Le produit d'une matrice par un réel

PRINCIPE DU PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN REEL

Le produit d'une matrice par un nombre λ s'effectue en multipliant chaque élément de cette matrice par λ, comme dans l'exemple suivant :

$$3 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 1 \\ 3 \times (-2) & 3 \times 2 \\ 3 \times 0 & 3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

On peut ainsi définir le produit d'une matrice de format $(m\,,n)$ par un réel de la façon suivante :

Définition II.13

Le produit d'une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de format $(m\,,n)$ par un réel λ, est la matrice :

$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda \times a_{ij}).$$

Ce produit a plusieurs propriétés (assez intuitives).

PROPRIETES DU PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN REEL

Quel que soit les matrices **A** et **B** de format $(m\,,n)$ et les réels α et β. On a :

P_1. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

P_2. $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

P_3. $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$

P_4. Ce produit a un élément neutre : le réel 1. Ceci signifie que, quelle que soit la matrice **A**, on a :

$$1 \times \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

3. Produit d'une matrice par une matrice colonne à droite

PRINCIPE DU PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UNE MATRICE COLONNE A DROITE

Le produit d'une matrice **A** par une matrice colonne **X** à droite est la combinaison linéaire des colonnes de **A** dont les coefficients sont les éléments de **X**.

Par exemple, le produit de la matrice **A** :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

par la matrice colonne **X** :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

est :

$$\mathbf{AX} = 2\times\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3)\times\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ce produit n'est évidemment possible que parce le nombre de colonnes de **A** est égal au nombre de lignes de **X**.

Définition II.13

Le produit de la matrice **A** :

$$\mathbf{A} = (C_1 \ \dots \ C_n),$$

où C_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de **A**, par la matrice colonne **X** :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

est :

$$\mathbf{AX} = x_1C_1 + \dots + x_nC_n..$$

Dans le cas particulier où **A** est une matrice ligne, le produit **AX** est un nombre. Ainsi le produit de la matrice ligne de format (1, 3) :

$$\mathbf{L} = (1 \quad -1 \quad 2)$$

par la matrice colonne de format (3, 1) :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

est le nombre :

$$\mathbf{LC} = (-1) \times 1 + 0 \times (-1) \times + 2 \times 2 = 3.$$

On peut aussi écrire le résultat sous la forme d'une matrice d'ordre 1 : **LC** = (3).

4. Produit de deux matrices

Le principe du produit matriciel se déduit de celui du produit d'une matrice par une colonne. Soient, par exemple, les deux matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on note $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$, $\mathbf{C_4}$ les colonnes de **B**, alors on peut définir le produit **AB** de ces deux matrices en posant :

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{AC_1} \quad \mathbf{AC_2} \quad \mathbf{AC_3} \quad \mathbf{AC_4}).$$

On utilise alors la règle du produit d'une matrice (**A**) par une colonne ($\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$, $\mathbf{C_3}$ et $\mathbf{C_4}$ successivement) — qui peut être appliquée dans la mesure où le nombre de colonnes de **A** est égal au nombre d'éléments de chaque colonne $\mathbf{C_i}$:

$$\mathbf{AC_1} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\times\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\times\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AC_2} = 2 \times \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\times \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AC_3} = 1 \times \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2\times \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} + 0\times \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{AC_4} = -3\times \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 1\times \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} +1 \times \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 3 & 0\\ 6 & -3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Définition II.14

Le produit des matrices $\mathbf{A} = (a_{ij})$, de format (m, n), et $\mathbf{B} = (C_1 \ \dots \ C_p)$, de format (n, p), où C_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de **B**, est donné par:

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{A}C_1 \dots \mathbf{A}C_p).$$

Ce produit n'est possible que si le nombre de colonnes de **A** est égal au nombre de lignes de **B**. Et le format de la matrice **AB** est (m, p), où m est le nombre de lignes de **A** et p, le nombre de colonnes de **B.**

Le produit de deux matrices peut être effectué différemment, tout en arrivant évidemment au même résultat. En effet, en posant, dans notre exemple :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}$$

(où L_1 et L_2 sont les lignes de **A**), et en disposant les trois matrices **A**, **B** et **AB** de la façon suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix}C_1 & C_2 & C_3 & C_4\end{pmatrix}$$
$$\qquad\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\end{matrix} \qquad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix}L_1C_1 & L_1C_2 & L_1C_3 & L_1C_4\\ L_2C_1 & L_2C_2 & L_2C_3 & L_2C_4\end{pmatrix},$$

on obtient le même résultat que précédemment :

- $L_1C_1 = (1 \ \ -1 \ \ 2)\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = (-1) \times 1 + 0\times(-1) + 2\times 2 = 3,$
- $L_2C_1 = (0 \ \ -2 \ \ 3)\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = (-1)\times 0 + 0\times(-2) + 2\times 3 = 6,$
- $L_1C_2 = (1 \ \ -1 \ \ 2)\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = 2\times 1 + 3\times(-1) + 1\times 2 = 1$
- *etc.*

Définition II.14bis

Le produit des matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}L_1\\ \vdots\\ L_m\end{pmatrix}, \text{ de format } (m, n) \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix}C_1 & \dots & C_p\end{pmatrix}, \text{ de format } (n, p),$$

est :

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix}L_1C_1 & \dots & L_1C_p\\ \vdots & & \vdots\\ L_mC_1 & \dots & L_mC_p\end{pmatrix} = (L_iC_j),$$

où L_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de **A** et C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de **B**.

Fin de la semaine 2

Faire le Quiz intitulé « Quiz - Cours 2 »

Dans la préparation du TD, vous pouvez aller jusqu'à l'exercice 4 du dossier de TD 2

Pour se remettre le produit matriciel en mémoire

Le produit **AB** des matrices **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et **B** = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est **AB** = $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Une des façons de simplifier le calcul est de l'effectuer en disposant les matrices de la façon suivante :

$$\begin{array}{r|l} & \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \qquad\ \ \downarrow \quad\ \downarrow \\ \hline \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} & \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \end{array}$$

$L_1C_2 = 1$

Le produit matriciel a plusieurs propriétés.

PROPRIETES DU PRODUIT MATRICIEL

P$_{\text{II-1}}$. Lorsque le produit matriciel est possible, il est **associatif** : l'ordre dans lequel on effectue le produit de trois matrices n'affecte pas le résultat. Autrement dit :

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Quelles que soient les matrices **A**, de format $(m\ ,\ n)$, **B**, de format $(n\ ,\ p)$ et **C**, de format $(p\ ,\ r)$.

P$_{\text{II-2}}$. Lorsque le produit matriciel est possible, il est **distributif** par rapport à la somme de deux matrices. Autrement dit :

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Quelles que soient la matrice **A**, de format $(m\ ,\ n)$, et les matrices **B** et **C** de format $(n\ ,\ p)$.

P$_{\text{II-3}}$. Le **produit** d'une matrice quelconque **A**, de format (m, n) **par la matrice identité** $\mathbf{I_m}$ à gauche, ou la matrice identité $\mathbf{I_n}$ à droite, est égal à **A** :

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$$

P$_{\text{II-4}}$. La **transposée du produit de deux matrices** est égale au produit des transposées, dans l'ordre inverse. Autrement dit, soient deux matrices **A** et **B**, on a :

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'.$$

Cette propriété est démontrée en annexe (annexe 1) de ce chapitre (pour les experts)

P$_{\text{II-5}}$. Le **produit de deux matrices transposées** est une matrice symétrique.

Cette dernière propriété est une conséquence de la propriété précédente. En effet :

$$(AA')' = (A')'A' = AA'.$$

En revanche, le produit matriciel *n'est pas commutatif*

En règle générale, lorsque le produit **AB** est possible, le produit **BA** ne l'est pas (voir le premier exemple de produit matriciel page précédente, où A est une matrice de format (2 , 3) et B, une matrice de format (3 , 4)). En effet, puisque **A** est de format $(m\ ,\ n)$ et **B**, de format $(n\ ,\ p)$ — de sorte que **AB** soit possible —, pour que **BA** soit possible, il faudrait que $m = p$, ce qui n'a *a priori* aucune raison d'être. En outre, même lorsque ces deux produits **AB** et **BA** sont possibles, ils peuvent être différents, comme ceux des matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

puisque :

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D. Matrice inverse d'une matrice carrée

On dit que la matrice carrée **B** est l'*inverse à droite* de la matrice carrée **A** si :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

A, **B** et **I** étant évidemment de même ordre.
De même, **C** est l'*inverse à gauche* de **A** si :

$$\mathbf{CA} = \mathbf{I}.$$

Si on multiplie à droite les deux membres de cette égalité par **B**, l'inverse à droite de **A**, on a :

$$\mathbf{CAB} = \mathbf{B}.$$

Comme **AB** = **I**, il s'ensuit que **C** = **B**.
L'inverse à droite d'une matrice carrée est donc égal à son inverse à gauche. C'est pourquoi on ne parle que de l' « inverse » de **A**. Celui-ci est, en outre, unique. Supposons, en effet, que **A** ait une autre inverse, **D.** On aurait alors :

$$\mathbf{AD} = \mathbf{I}.$$

Si on multiplie à gauche les deux membres de cette égalité par **C**, on a :

$$\mathbf{CAD} = \mathbf{C}.$$

Comme **CA** = **I**, il s'ensuit que **D** = **C.** L'inverse est donc bien unique. On le note $\mathbf{A}^{-1}$ et on a :

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

D'où :

> *Définition* II.15
>
> On dit que la matrice carrée **M** d'ordre n est l'inverse de la matrice carrée **A** d'ordre n si et seulement si, on a :
>
> $$\mathbf{AM} = \mathbf{MA} = \mathbf{I_n}\,.$$
>
> On note alors cette matrice : $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}$.

E. Retour sur la méthode du pivot

Le produit de la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à droite est :

$$\begin{aligned}\mathbf{AX} &= x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ 2y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -2z \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} x - y + z \\ -x + 2y + 2z \\ 2x + y - 2z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

C'est le membre de gauche du système :

$$S_2 \begin{cases} x - y + z = -1 \\ -x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = -5 \end{cases}$$

que l'on peut, pour cette raison, écrire sous la forme :

$$S_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

indiquée au début de ce chapitre.
De la même façon, on peut écrire le système :

$$S_5 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 & L_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 & L_2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 & L_3 \end{cases}$$

sous la forme :

$$\mathbf{BX} = \mathbf{U}, \qquad \text{où } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Lorsque l'on considère le système sous sa forme matricielle, on applique la méthode du pivot à la matrice élargie, ici $(\mathbf{B}|\mathbf{U})$:

$$(\mathbf{B}|\mathbf{U}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

ce qui revient à le « triangulariser ». En choisissant L_1 comme pivot et en remplaçant L_2 par $L_2 + L_1$ et L_3 par $-L_3 + 2L_1$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \text{ (pivot)} \\ L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = -L_3 + 2L_1 \end{array}$$

On réitère alors l'opération. En prenant L_2' comme pivot et en remplaçant L_3' par $3L_3' - 2L_2'$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' \text{ (}2^{nd}\text{ pivot)} \\ L_3'' = L_3' - 2L_2' \end{array}$$

La matrice élargie qui en résulte est celle du système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ \quad 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ \quad\quad -3x_3 = 6 \end{cases}$$

que l'on peut résoudre en commençant par la dernière ligne. On trouve alors que le système S_5 a pour unique solution le triplet :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

F. Détermination de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode du pivot

La méthode du pivot permet de savoir si une matrice carrée a une inverse (on dit alors qu'elle est **inversible**) et, le cas échéant, de la déterminer.

METHODE

Si **A** est la matrice que l'on cherche à inverser, on considère le système :

$$\textbf{[1]} \qquad \mathbf{AX} = \mathbf{U}$$

où **X** et **U** sont des matrices colonnes quelconques. On peut aussi écrire ce système :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{IU}$$

où **I** est la matrice identité de même ordre que **A**. On applique alors la méthode du pivot à ce système, en combinant ses lignes, de façon à transformer **A** en une matrice identité. Comme, ce faisant, on combine également les lignes de **I**, on arrive finalement à une égalité de la forme :

$$\mathbf{IX} = \mathbf{MU}$$

ou encore :

$$\mathbf{X} = \mathbf{MU}.$$

La matrice M est en fait l'inverse de A, si elle existe. En effet, en pré-multipliant les deux membres de l'équation [1] par $\mathbf{A}^{-1}$, il vient :

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$$

et donc :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}.$$

De cette égalité et de $\mathbf{X} = \mathbf{MU}$, on déduit que :

$$\mathbf{MU} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}.$$

Cette égalité étant vraie quelle que soit la matrice colonne **U**, il s'ensuit que :

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Remarque : pour que le raisonnement précédent soit valable, et donc que $\mathbf{A}^{-1}$ existe, il faut pouvoir transformer **A** en la matrice identité de même ordre, ce qui n'est possible que si, lors de sa « triangularisation », aucun zéro n'apparaît sur sa diagonale (on verra plus loin d'autres méthodes permettant de savoir si une matrice carrée est inversible).

Pour voir concrètement comment on procède, on va reprendre l'exemple de la matrice **B** (du système S_5 de la page précédente) :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère alors le système :

$$S_5 : \ \mathbf{BX} = \mathbf{IU}$$

ou encore :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}.$$

Etape 1 – Pour y faire apparaître une matrice **I** à la place de la matrice **B**, *on commence par triangulariser cette matrice*. Pour ce faire, on garde L_1 comme pivot et l'on remplace L_2 et L_3 respectivement par $L_2 + L_1$ et $L_3 - 2L_1$, et on le fait dans toute l'équation, donc dans les deux matrices, ce qui donne :

$$\begin{array}{l} L_1 \text{ (pivot)} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

On réitère alors l'opération, en prenant L'_2 comme pivot et en remplaçant L'_3 par $L'_3 + 2L'_2$ dans les deux matrices, ce qui donne :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L'_2 \text{ (2}^{\text{ème}}\text{pivot)} \\ L'_3 + 2L'_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

La matrice du membre de gauche de ce système est alors une matrice triangulaire supérieure.

Etape 2 – *L'étape suivante consiste à la transformer en une matrice diagonale*. Pour ce faire, on applique à nouveau la méthode du pivot, mais en choisissant, cette fois-ci, la dernière ligne L''_3 comme pivot de façon à faire apparaître des 0 dans la dernière colonne de la matrice. On remplace L'_2 par $L''_2 = -L'_2 + L''_3$ et L_1 par $L'_1 = 3L_1 - 2L''_3$. On obtient alors :

$$\begin{array}{l} 3L_1 - 2L''_3 \\ -L'_2 + L''_3 \\ L''_3 \text{ (3}^{\text{ème}}\text{pivot)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

En gardant, enfin, L''_2 comme pivot et en remplaçant L'_1 par $L'_1 + 2L''_2$, il vient :

$$\begin{array}{l} L'_1 + 2L''_2 \\ L''_2 \text{ (4}^{\text{ème}}\text{ pivot)} \\ L''_3 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

Etape 3 – La dernière étape consiste à transformer la matrice diagonale du membre de gauche en une matrice identité. Pour ce faire, il suffit de diviser L''_1 et L''_3 par 3 et L''_2 par – 3, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

Par conséquent, le système **BX** = **IU** est équivalent au système **IX** = $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}$ avec :

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Remarques

✓ Comme **X** et **U** restent inchangées lors de toutes ces opérations, on peut travailler sur la matrice élargie :

$$(\mathbf{B}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient dans ce cas :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right).$$

La matrice située à droite de la barre verticale est alors $\mathbf{B}^{-1}$.

✓ On vérifie que le système S_5 :

$$\mathbf{BX} = \mathbf{U}, \qquad \text{où } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

résolu dans le paragraphe précédent, a pour solution :

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

III. Rang d'une matrice et résolution d'un système d'équations linéaires

La notion de rang joue un rôle central en algèbre linéaire. Par exemple, le rang des matrices d'un système d'équations linéaires permet de savoir si celui-ci a ou non une solution, et ce, avant même d'en commencer la résolution. Mais il permet bien d'autres choses, on le verra.

Pour définir la notion de rang d'une matrice, il faut d'abord présenter celle de dépendance linéaire, qui lui est étroitement associée.

A. Dépendance linéaire des colonnes d'une matrice

Définition II.15

Soit $\mathbf{A} = (C_1 \ldots C_n)$, une matrice de format (m, n), où C_j désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de **A**.

On dit que les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de **A** sont **linéairement dépendantes** ou **liées** s'il existe n nombres $x_1, \ldots, x_n$, *non tous nuls*, tels que :

$$x_1C_1 + \ldots + x_nC_n = \mathbf{0}_{\mathbf{m},\mathbf{1}}$$

Comme :

$$x_1C_1 + \ldots + x_nC_n = \mathbf{0}_{\mathbf{m},\mathbf{1}}$$

$\Leftrightarrow (C_1 \ldots C_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbf{m},\mathbf{1}}$ (voir, plus haut, produit d'une matrice par une matrice colonne à droite)

$\Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbf{m},\mathbf{1}}$

$\Leftrightarrow \mathbf{AX} = \mathbf{0}_{\mathbf{m},\mathbf{1}}$ avec $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

cette définition peut également s'énoncer ainsi :

Définition II.15bis

Soit $\mathbf{A} = (C_1 \dots C_n)$, une matrice de format $(m\ ,\ n)$, où C_j désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{A}$. On dit que les colonnes de $\mathbf{A}$ sont **linéairement dépendantes** ou **liées** s'il existe une matrice colonne $\mathbf{X}$ non nulle, telle que :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}_{\mathbf{m},\mathbf{1}}.$$

Par exemple, le produit de la matrice $\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne non nulle $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est :

$$\mathbf{A_1X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de $\mathbf{A_1}$ sont donc linéairement dépendantes.

Si l'on note C_1, C_2 et C_3, les trois colonnes de $\mathbf{A_1}$, on a donc $C_1 + C_2 + 3C_3 = \mathbf{O_{3,1}}$. D'où $C_1 = -C_2 - 3C_3$.

Autre exemple : le produit de $\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne non nulle $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est nul (faites-le !), et les colonnes de $\mathbf{A_2}$ sont donc linéairement dépendantes. Ici, si l'on note C_1, C_2 et C_3, les trois colonnes de $\mathbf{A_2}$, on a donc $-C_1 + 2C_2 - C_3 = \mathbf{O_{3,1}}$. D'où $C_1 = 2C_2 - C_3$.

Dans ces deux cas, on peut écrire l'une des colonnes de la matrice comme une combinaison linéaire des deux autres. En fait, la dépendance linéaire des colonnes d'une matrice exprime simplement le fait que l'une des colonnes de cette matrice est une combinaison linéaire des autres. Il découle, en effet, de la définition précédente que :

PROPRIETE II-6

Les colonnes d'une matrice $\mathbf{A}$ sont linéairement dépendantes – ou liées – si et seulement si l'une d'entre elles peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des autres.

Démonstration de la propriété II-6

Si C_1, par exemple, est une combinaison linéaire des autres colonnes de $\mathbf{A} = (C_1 \dots C_n)$:

$$C_1 = \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_n C_n,$$

alors il vient immédiatement que les colonnes $C_1, \dots, C_n$ sont linéairement dépendantes puisque l'on a :

$$C_1 - \lambda_2 C_2 - \dots - \lambda_n C_n = \mathbf{0}$$

avec au moins un coefficient, celui de C_1, non nul.

• Réciproquement, si les colonnes de $\mathbf{A}$ sont linéairement dépendantes, alors (par définition de la dépendance linéaire) il existe n nombres, $x_1, \dots, x_n$, dont l'un au moins est différent de 0, tels que :

$$x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = \mathbf{0}$$

Si, par exemple, x_1 est non nul, cette égalité peut alors s'écrire :

$$C_1 = \frac{x_2}{x_1} C_2 + \dots + \frac{x_n}{x_1} C_n$$

La colonne C_1 est donc une combinaison linéaire des autres colonnes de la matrice $\mathbf{A}$.

Par exemple, Ici, si l'on note C_1 et C_2 les deux colonnes de la matrice $\mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, on a :

$$C_3 = -2C_2 + 0C_1.$$

Les colonnes de $\mathbf{A_3}$ sont linéairement dépendantes.

Autre exemple, les colonnes de la matrice **B** :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

sont linéairement dépendantes. Si l'on note C_1, C_2 et C_3 ses trois colonnes respectivement, on a, en effet :

$$C_3 = 0C_1 + 0C_2.$$

Il existe donc bien une matrice colonne **X** non nulle telle que $\mathbf{BX} = \mathbf{0}_{3,1}$ puisque :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci est d'ailleurs le cas de toutes les matrices comportant une colonne de 0, puisque celle-ci peut toujours s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des autres colonnes de la même matrice (il suffit que tous les coefficients de cette combinaison linéaire soient nuls). Soit :

PROPRIETE II-7

Si une matrice a une colonne de 0, alors ses colonnes sont linéairement dépendantes (ou liées).

B. Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice

L'indépendance linéaire est le contraire de la dépendance linéaire : les colonnes d'une matrice sont linéairement indépendantes si elles ne sont pas linéairement dépendantes. Soit, si l'on reprend la définition de la dépendance linéaire donnée plus haut :

Définition II.16

Soit $\mathbf{A} = (C_1 \ldots C_n)$, une matrice de format (m , n), où C_j désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de **A**.
On dit que les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de **A** sont **linéairement indépendantes** ou **libres** si le système :

$$x_1C_1 + \ldots + x_nC_n = \mathbf{0}_{m,1}$$

a pour seule solution :

$$x_1 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Ou, ce qui revient au même, si le système :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}, \text{ où } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

a pour seule solution $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

C. Comment savoir si les colonnes d'une matrice sont libres ou liées ?

METHODE

Pour savoir si les n colonnes d'une matrice $\mathbf{A} = (C_1 \ldots C_n)$ de format (m , n) sont linéairement dépendantes ou indépendantes, on résout donc le système :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}_{m,1}.$$

Ce système dont le second membre est $\mathbf{0}$ — et qui est donc *homogène* — a toujours $\mathbf{X} = \mathbf{0}_{n,1}$ pour solution. Deux cas de figure sont dès lors possibles :
1$^{\text{er}}$ cas — $\mathbf{X} = \mathbf{0}_{n,1}$ en est l'unique solution et les colonnes de **A** sont linéairement indépendantes;
2$^{\text{nd}}$ cas — ce système a d'autres solutions que $\mathbf{X} = \mathbf{0}_{n,1}$: les colonnes de **A** sont linéairement dépendantes.

Soit, par exemple, la matrice :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de **M** sont linéairement indépendantes si et seulement si on a :

$$\mathbf{MX} = \mathbf{0}_{3,1} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}_{3,1}.$$

Pour résoudre ce système, on applique la méthode du pivot à la matrice :

$$(\mathbf{M}\,|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

On obtient ainsi :

$$(\mathbf{M}\,|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' = L_1 + 2L_2 \\ L_3' = L_1 - 2L_3 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2' \\ L_3'' = 5L_2' - 3L_3' \end{array}$$

D'où :

$$\mathbf{MX} = \mathbf{0}_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \\ z = 0 \end{cases}$$

Le système $\mathbf{MX} = \mathbf{0}_{3,1}$ a donc pour unique solution : $\mathbf{X} = \mathbf{0}_{3,1}$. Il s'ensuit que les colonnes de **M** sont linéairement indépendantes. On peut d'ailleurs dire la même chose des matrices « intermédiaires » apparues lors de la triangularisation de **M** :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : le système étant homogène, en appliquant la méthode du pivot à $(\mathbf{M}\,|\,\mathbf{0})$ ne modifie que la partie de cette matrice située à gauche de la ligne verticale (puisque des combinaisons linéaires de 0 donneront toujours 0). Du coup, on aurait pu se passer de récrire cette colonne de 0 à chaque étape et appliquer la méthode à **M** uniquement.

Par la même méthode, on peut démontrer que les colonnes de la matrice **N** :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendantes. En effet, en appliquant la méthode du pivot à cette matrice, on obtient (par exemple) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_1 + 2L_2, \\ L_1 + 2L_3 \end{array} \text{ puis } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2' \\ 3L_2' - L_3' \end{array}.$$

Le système $\mathbf{NX} = \mathbf{0}_{3,1}$ est donc équivalent au système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

et qui a pour solutions :

$$x_1 = \frac{2x_3}{3},\ x_2 = -\frac{x_3}{3},\ x_3 \text{ quelconque.}$$

Le système $\mathbf{NX} = \mathbf{0}_{3,1}$ ayant d'autres solutions que $\mathbf{X} = \mathbf{0}_{3,1}$, les colonnes de **N** sont linéairement dépendantes, tout comme celles des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ces deux exemples, l'application de la méthode du pivot à la matrice – **M** dans le premier cas et **N** dans le second –a consisté ici à « triangulariser » la matrice, ce qui nous a permis d'aboutir à une matrice triangulaire.

Dans le cas de la matrice **M**, nous avons abouti à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire ne comportant aucun zéro sur sa diagonale principale, raison pour laquelle la seule solution du système a été $\mathbf{X} = \mathbf{0}_{3,1}$. A chaque fois qu'il en est ainsi, on peut conclure que les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes. En effet :

PROPRIETE II-8

Si aucun des termes de la diagonale principale d'une matrice triangulaire n'est nul, alors les colonnes de cette matrice sont linéairement indépendantes.

Dans le cas de la matrice **N**, en revanche, nous avons abouti à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire comportant un zéro sur sa diagonale principale, raison pour laquelle le système avait d'autres solutions que $\mathbf{X} = \mathbf{0}_{3,1}$. A chaque fois qu'il en est ainsi, on peut conclure que les colonnes de la matrice sont linéairement dépendantes. En effet :

PROPRIETE II-9

Si (au moins) l'un des termes de la diagonale principale d'une matrice triangulaire est nul, alors les colonnes de cette matrice sont linéairement dépendantes.

Les propriétés II-8 et II-9 sont démontrées dans les encadrés du manuel (Gun & Jallais, 2018), p. 73-76.

Le système **NX** = **0** est ainsi équivalent à un système homogène comportant plus d'inconnues que d'équations, plus précisément au système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce second cas permet de constater que lorsqu'une matrice a plus de colonnes que de lignes (non nulles), alors ces colonnes ne peuvent pas être linéairement indépendantes. Le nombre de colonnes linéairement indépendantes d'une matrice ne peut donc pas excéder le nombre de lignes (non nulles) que cette dernière comporte. De façon plus générale

PROPRIETE II-10

Si une matrice a plus de colonnes que de lignes, alors ses colonnes sont linéairement dépendantes.

Fin de la semaine 3

Faire le Quiz intitulé « Quiz-Cours n°3 »

Dans la préparation du TD, vous pouvez aller jusqu'à la question 1 de l'exercice 5 du dossier de TD 2

Annexe 1 - *Démonstration de la propriété* P24

Commençons par remarquer que si

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

est une matrice colonne et

$$\mathbf{L} = (l_1 \quad \dots \quad l_n)$$

une matrice ligne, alors :

$$\mathbf{LC} = (l_1 \quad \dots \quad l_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = l_1c_1 + \dots + l_nc_n$$

et

$$\mathbf{C}'\mathbf{L}' = (c_1 \quad \dots \quad c_n) \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = c_1\, l_1 + \dots + c_nl_n$$

Par conséquent :

$$[\text{II.1}] \qquad \mathbf{LC} = \mathbf{C}'\mathbf{L}'.$$

Soit maintenant les matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, \text{ de format } (m, n),$$

$$\text{et } \mathbf{B} = (C_1 \quad \dots \quad C_p), \text{ de format } (n, p),$$

(où L_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de **A** et C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de **B**).

Si on pose :

$$\mathbf{AB} = (m_{ij}) \text{ avec } m_{ij} = (L_iC_j),$$

alors :

$$(\mathbf{AB})' = (m'_{ij}) \text{ avec } m'_{ij} = m_{ji} = (L_jC_i)$$

Or, comme :

$$\mathbf{B}'\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} C'_1 \\ \vdots \\ C'_p \end{pmatrix} (L'_1 \quad \dots \quad L'_m) = (C'_iL'_j).$$

et comme (en raison de [II.1]) :

$$L_jC_i = C'_iL'_j,$$

il résulte que :

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'.$$

Remarque

Alors que l'on s'est ici intéressé à la dépendance — ou à l'indépendance — linéaire des colonnes d'une matrice **A**, la méthode utilisée, s'appuyant sur la résolution des systèmes d'équations linaires présentée au chapitre 1, a paradoxalement consisté à appliquer le pivot aux lignes de **A**. Or, on a vu (toujours dans le chapitre 1) que, lorsque deux lignes (ou équations) d'un système étaient liées, l'application du pivot faisait apparaître une ligne de 0. En appliquant cette méthode aux colonnes de **A**, elle doit donc faire apparaître au moins une colonne de 0 lorsque ces dernières sont liées (linéairement dépendantes).

Ainsi, si l'on applique la méthode du pivot aux colonnes de la matrice **N** :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

on obtient par exemple :

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad 2C_2 - C_1 \quad 2C_3 + C_1 \end{array}, \qquad \text{puis} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2' \quad 3C_3' - C_2' \end{array}.$$

La troisième colonne de cette dernière matrice étant nulle, les colonnes de **N** sont linéairement dépendantes. On aurait pu arriver à la même conclusion en remarquant que les deux dernières colonnes de la matrice précédente sont proportionnelles ($C_3' = 3C_2'$).

Cette méthode présente l'avantage de permettre de déterminer le lien existant entre ces colonnes. En effet, de :

$$3C_3' - C_2' = \mathbf{0},$$

on déduit :

$$3(2C_3 + C_1) - (2C_2 - C_1) = 0$$

et donc

$$4C_1 - 2C_2 + 6C_3 = 0,$$

ce qui donne, par exemple :

$$C_2 = 2C_1 + 3C_3.$$

Si l'on applique maintenant le pivot aux colonnes de :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad 2C_2 - C_1 \quad 2C_3 + C_1 \end{array}, \qquad \text{puis} \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2' \quad 3C_3' - C_2' \end{array}.$$

Aucune colonne de 0 n'apparaît : les termes de la diagonale de cette matrice triangulaire étant non nuls, les colonnes de **M** sont linéairement indépendantes.

Ainsi, pour savoir si les colonnes d'une matrice **A** sont liées ou libres, on peut appliquer la méthode du pivot indifféremment aux lignes ou aux colonnes de cette matrice. Mais seule l'application du pivot aux colonnes permet d'identifier l'éventuelle relation linéaire existant entre les colonnes.

D. Dépendance (ou indépendance) linéaire des lignes d'une matrice

Les définitions données dans le cas des colonnes d'une matrice se transposent aisément dans le cas de ses lignes.

Définition II.17

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$, une matrice de format $(m\ , n)$, où L_i désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de **A**.

On dit que les lignes L_1, …, L_m de **A** sont **linéairement dépendantes** ou **liées** s'il existe m nombres $x_1,\ldots,$ x_m, *non tous nuls*, tels que :

$$y_1L_1 + \ldots + y_mL_n = \mathbf{0_{1,n}}$$

Comme :

$$y_1L_1 + \ldots + y_mL_m = \mathbf{0_{1,n}}$$

$$\Leftrightarrow (y_1 \ldots y_m)\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = \mathbf{0_{1,m}}$$

$$\Leftrightarrow (y_1\ \ldots\ y_m)\mathbf{A} = \mathbf{0_{1,n}}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{YA} = \mathbf{0_{1,n}} \text{ avec } \mathbf{Y} = (y_1\ \ldots\ y_m),$$

cette définition peut également s'énoncer ainsi :

Définition II.17bis

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$, une matrice de format $(m\ , n)$, où L_i désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de **A**. On dit que les lignes de **A** sont **linéairement dépendantes** ou **liées** s'il existe une matrice ligne **Y** non nulle, telle que :

$$\mathbf{YA} = \mathbf{0_{1,n}}.$$

Comme les lignes de la matrice **A** sont les colonnes de sa transposée **A'**, dire que les lignes de **A** sont linéairement dépendantes revient à dire que les colonnes de **A'** le sont. Toutes les propriétés rencontrées dans les paragraphes précédents (**A, B et C.**) sont donc également valables ici.

Pour savoir, par exemple, si les lignes d'une matrice sont linéairement indépendantes, on peut donc utiliser les mêmes méthodes que pour ses colonnes, en appliquant le pivot sur ses lignes. Pour répondre à la question posée — dépendance ou indépendance linéaire des lignes —, il suffit alors de regarder si sa diagonale comporte ou non (au moins) un 0.

Si, par exemple, on applique la méthode du pivot aux lignes de la matrice :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

il vient :

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2 + L_1, \\ 2L_3 + L_1 \end{array} \end{array} \text{ puis : } \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 - 3L'_2 \end{array} \end{array}.$$

Cette dernière matrice comportant une ligne de 0, ses lignes, et en conséquence celles de **N**, sont linéairement dépendantes.
Cette méthode permet même de déterminer le lien entre les lignes de **N**. En effet, comme :

$$L'_3 - 3L'_2 = \mathbf{0},$$

il s'ensuit que :

$$(2L_3 + L_1) - 3(2L_2 + L_1) = \mathbf{0},$$

et donc que :

$$L_1 + 3L_2 - L_3 = \mathbf{0}.$$

E. Rang d'une matrice

Quand on pose la question de la dépendance ou de l'indépendance linéaire des colonnes (ou lignes) d'une matrice, on considère ces colonnes (ou lignes) dans leur ensemble, comme un tout. La question porte en fait sur la matrice, dont l'ensemble des colonnes (ou ligne) est libre ou lié.
Considérons les quatre matrices $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$ et $\mathbf{M_4}$ suivantes :

- $\mathbf{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

  matrice triangulaire sans 0 sur sa diagonale principale, et donc dont les deux colonnes sont linéairement indépendantes.

- $\mathbf{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{M_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

  $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$ et $\mathbf{M_4}$ sont trois matrices de format (2 , 3) dont les colonnes sont linéairement dépendantes, puisqu'elles ont plus de colonnes que de lignes. Pourtant elles sont différentes :
  - $\mathbf{M_2}$ contient des sous-matrices d'ordre 2 dont les colonnes sont linéairement indépendantes ; $\mathbf{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, tout d'abord, mais aussi : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Prises deux à deux, les colonnes de $\mathbf{M_2}$ sont donc linéairement indépendantes ; plus précisément, les trois colonnes de $\mathbf{M_2}$ sont linéairement dépendantes, mais on peut extraire de $\mathbf{M_2}$ deux colonnes linéairement indépendantes.
  - Ce n'est pas le cas de $\mathbf{M_3}$, dont les trois sous-matrices d'ordre 2, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ont des colonnes linéairement dépendantes. En revanche, chacune des sous-matrices colonnes de $\mathbf{M_3}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ est linéairement indépendante. Prises une à une, les colonnes de $\mathbf{M_3}$ sont donc linéairement indépendantes ; plus précisément, les trois colonnes de $\mathbf{M_3}$ sont linéairement dépendantes, mais on peut extraire de $\mathbf{M_3}$ une colonne linéairement indépendante.
  - Quant à $\mathbf{M_4}$, comme c'est une matrice nulle, elle ne contient que des sous-matrices nulles, à savoir des sous-matrices dont les colonnes sont linéairement dépendantes.

La notion de rang permet de bien distinguer les cas de ces trois matrices.

1. Définitions

Définition II.18

On appelle rang de la matrice $\mathbf{A}$, noté $\text{rang}\mathbf{A}$, le nombre maximum de colonnes (ou de lignes) linéairement indépendantes que cette matrice contient.

Si l'on reprend l'exemple des quatre matrices ci-dessus, on a :

- $\text{rang}\mathbf{M_1} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2$ (puisque ses deux colonnes sont linéairement indépendantes) ;
- $\text{rang}\mathbf{M_2} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 2$
- $\text{rang}\mathbf{M_3} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = 1$.
- $\text{rang}\mathbf{M_4} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

La matrice $\mathbf{M_1}$ présente la particularité d'être carrée et d'avoir toutes ses colonnes (et donc toutes ses lignes) linéairement indépendantes. Pour cette raison, on dit qu'elle est **de plein rang** ou **régulière**. Au contraire, les matrices carrées dont les colonnes (et donc les lignes) sont linéairement dépendantes sont qualifiées de **singulières**.

C'est par exemple le cas de la matrice suivante, qui est carrée, et dont les colonnes sont linéairement dépendantes (puisque ses deux premières colonnes sont proportionnelles) :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dans le cas particulier des matrices triangulaires, l'observation de la diagonale principale suffit à conclure si elles sont singulières ou régulières selon que leur diagonale principale contient ou pas (au moins) un zéro. On peut donc reformuler les propriétés II-8 et II-9 comme suit :

PROPRIETE II-8BIS

Si aucun des termes de la diagonale principale d'une matrice triangulaire **T** n'est nul, alors cette matrice est régulière. On a : rang**T** = ordre**T**.

PROPRIETE II-9BIS

Si au moins l'un des termes de la diagonale principale d'une matrice triangulaire **T** est nul, alors cette matrice est singulière. On a : rang**T** < ordre**T**.

Remarque : dans la définition du rang, on a supposé implicitement que le rang des lignes d'une matrice est égal à celui de ses colonnes. Or il n'existe a priori aucune raison pour que cela soit le cas. En fait, il s'agit d'un résultat qui est loin d'aller de soi et qu'on pourra démontrer quand on disposera des outils nécessaires. Pour le moment, on énoncera les propriétés du rang d'une matrice qui sont valables pour ses lignes et pour ses colonnes.

2. Propriétés

Trois propriétés permettent de déterminer très facilement le rang de n'importe quelle matrice :

PROPRIETES DU RANG

PROPRIETE II-11 – Le rang d'une matrice ne change pas si l'on permute ses colonnes ou ses lignes.

PROPRIETE II-12 – Le rang d'une matrice ne change pas si l'on remplace une de ses lignes (respectivement colonnes) par une combinaison linéaire d'elle-même (avec un coefficient non nul) et d'une autre ligne (respectivement colonne) de la matrice.

PROPRIETE II-13 – Le rang d'une matrice est supérieur ou égal au rang de n'importe laquelle de ses sous-matrices.

Les propriétés II-11 et II-12 permettent de faire apparaître très facilement une matrice – ou une sous-matrice – triangulaire ayant le même rang que **A**.

□ *Exemple 1*

Soit la matrice **A₁** = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\text{rang}\mathbf{A_1} = \text{rang}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 + C_1 & C_3 + C_1 \end{array} \end{array}$$

(en raison de la propriété II-12, C_1 servant de pivot).

On a donc :

$$\text{rang}\mathbf{A_1} = \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(en raison de la propriété II-11 ; on a ici permuté les colonnes 2 et 3).

Il s'ensuit que :

$$\text{rang}\mathbf{A_1} = 3$$

(en raison de la propriété II-8, cette matrice triangulaire d'ordre 3 ne comportant aucun 0 sur sa diagonale)

□ *Exemple 2*

Soit la matrice :

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ -4 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\text{rang}\mathbf{A_2} = \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & -18 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ 2L_1 + L_2 \\ L_3 \\ 4L_1 - L_4 \end{matrix} \text{ (voir propriété II-12)}$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_3 \\ L'_4 \\ L'_2 \end{matrix} \text{ (voir propriété II-11)}$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_3 \\ 3L_3 - L'_4 \\ L'_2 \end{matrix} \text{ (voir propriétés II-11 et II-12)}$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \geq \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (voir propriété II-13)}$$

Or $\text{rang}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ (voir propriété II-8bis).

On a donc : rang$\mathbf{A_2} \geq 2$ et rang$\mathbf{A_2} \leq 2$ (car $\mathbf{A_2}$ a deux lignes). D'où : rang$\mathbf{A_2}$ **=** 2.

3. Rang et existence de solutions des systèmes d'équations linéaires

Soit le système d'équations linéaires :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{U},$$

où **X** est la matrice colonne des inconnues, où **A** et **U** sont deux matrices données, la première, de format (m, n), la seconde, de format $(1, m)$. En notant $\mathbf{A} = (C_1 \ldots C_n)$, ce système peut également s'écrire :

$$x_1C_1 + \ldots + x_nC_n = \mathbf{U}.$$

Ceci signifie que la matrice colonne **U** peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des colonnes de **A**.

De deux choses l'une : soit ceci est vrai, et le système a au moins une solution, soit ceci est faux et le système n'a pas de solution. Or ceci est vrai (**U** peut s'écrire sous le forme d'une combinaison linéaire des colonnes de **A)** si et seulement si en ajoutant la colonne **U**, on n'augmente pas le rang (c'est-à-dire le nombre de colonnes linéairement indépendantes) et que l'on a :

$$\text{rang}\,(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{U}) = \text{rang}\mathbf{A}.$$

Sinon :

$$\text{rang}\,(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{U}) = 1 + \text{rang}\mathbf{A}.$$

Puisqu'on ajoute une colonne qui n'est pas une combinaison linéaire des autre, ce qui ajoute 1 au nombre total de colonnes linéairement indépendantes.

Il s'ensuit la propriété suivante :

PROPRIETE 39 – Le système **AX** = **U** :

. a (au moins) une solution si et seulement si rang(**A** | **U**) = rang**A**

. n'a pas de solution si et seulement si rang(**A** | **U**) = 1 + rang**A**.

□ *Exemple 1*

Soit le système S_1: $\begin{cases} x + 2y = 10 & L_1 \\ 2x - \ \ y = \ \ 5 & L_2 \end{cases}$ (c'est le même que dans le cours n°1).

On peut l'écrire sous la forme **AX** = **U**, avec **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, **X** = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et **U** = $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

La propriété 39 nous dit que ce système a une solution si rang(**A** | **U**) = rang**A**, mais n'en a pas si rang(**A** | **U**) = 1 + rang**A**.

Comme :

$$\text{rang}\mathbf{A} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} = 2$$

et

$$\text{rang}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{U}) = \text{rang}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) = \text{rang}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} = 2.$$

En effet, cette dernière matrice ayant deux lignes, son rang est inférieur ou égal à 2. Or son rang est supérieur ou égal au rang de sa sous-matrice **A**.

On a donc : rang($\mathbf{A}|\mathbf{U}$) $=$ rang**A** et le système S_1 a au moins une solution.

□ *Exemple 2*

Soit le système S : $\begin{cases} x - y + z = 1 & L_1 \\ -x + y - z = 2 & L_2 \\ 2x - y + z = 0 & L_3 \end{cases}$

On peut l'écrire sous la forme **AX** = **U**, avec **A** = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, **X** = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et **U** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme :

$$\text{rang}\mathbf{A} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

et

$$\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{U}) = \text{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \text{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$= \text{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\begin{matrix} L_1 \\ L'_3 \\ L'_2 \end{matrix} \geq \text{rang}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

On a : rang($\mathbf{A}|\mathbf{U}$) ≥ 3 et rang($\mathbf{A}|\mathbf{U}$) ≤ 3 car la matrice ($\mathbf{A}|\mathbf{U}$) a trois lignes.

D'où : rang($\mathbf{A}|\mathbf{U}$) $= 3 = 1 +$ rang**A** et le système S n'a pas de solution.