Objectif : savoir quand et comment appliquer la loi binomiale

Ex 1. Dans le cadre de son enquête "Music 360", Nielsen Co. a demandé à des adolescents et à des adultes par quels media ils avaient écouté de la musique au cours des 12 derniers mois. Près des deux tiers des adolescents américains de moins de 18 ans disent utiliser le site de partage de vidéos de google Inc. pour écouter de la musique et 35 % des adolescents disent utiliser le service de radio en ligne personnalisé de Pandora Media (le Wall Street Journal, 14 août 2012). Supposons que 10 adolescents soient choisis au hasard pour être interviewés sur la façon dont ils écoutent de la musique.

1) La sélection aléatoire de 10 adolescents pour savoir s'ils utilisent ou non le service de radio en ligne de Pandora constitue-t-elle une expérience binomiale ? Justifiez.

Ici, on peut considérer la sélection d'un adolescent au hasard dans l'échantillon et la probabilité d'utiliser Pandora comme une épreuve de Bernoulli. En effet, il existe, pour cet adolescent, une probabilité de succès (utiliser Pandora : 0,35), et une probabilité d'échec (ne pas utiliser Pandora : 0,65).

Lorsque l'on sélectionne 10 adolescents, on effectue finalement une succession de 10 épreuves de Bernoulli, chacune avec la même probabilité de succès (et donc d'échec). De plus, chaque adolescent étant sélectionné au hasard, chaque épreuve de Bernoulli de la succession est indépendante des autres. Ainsi, on a bien affaire à une expérience binomiale.

2) Quelle est la probabilité qu'aucun des 10 adolescents n'utilise Pandora ?

Ici, la variable aléatoire (qu'on appellera X) représentant cette expérience suit bien une loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, n étant le nombre de répétitions de l'épreuve de Bernoulli, et p la probabilité de succès. On a alors, pour k succès :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Ici, aucun des 10 adolescents ne doit utiliser Pandora, donc $k = 0$. On a :

$$\mathbb{P}(X = 0) = C_{10}^0 0{,}35^0 (1 - 0{,}35)^{10-0} = C_{10}^0 (0{,}65)^{10} = \frac{10!}{(10-0)!\,0!}(0{,}65)^{10} = 0{,}013$$

La probabilité qu'aucun des 10 adolescents n'utilise Pandora est de 1,3%.

3) Quelle est la probabilité que 4 des 10 adolescents utilisent Pandora ?

Ici, 4 des 10 adolescents doivent utiliser Pandora, donc $k = 4$. On a :

$$\mathbb{P}(X = 4) = C_{10}^4 0{,}35^4 (1 - 0{,}35)^{10-4} = \frac{10!}{(10-4)!\,4!} 0{,}35^4 (0{,}65)^6 = 0{,}24$$

La probabilité que 4 des 10 adolescents utilisent Pandora est de 24%.

4) Quelle est la probabilité qu'au moins 2 des 10 adolescents utilisent Pandora ?

Ici, au moins 2 des 10 adolescents doivent utiliser Pandora, donc $k \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) &= 1 - \big(\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)\big) \\ &= 1 - (0{,}013 + C_{10}^1 0{,}35^1 (1 - 0{,}35)^{10-1}) = 1 - (0{,}013 + C_{10}^1 0{,}35 (0{,}65)^9) \\ &= 0{,}914\end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins 2 des 10 adolescents doivent utiliser Pandora est de 91,4%.

Ex 2. Un sondage a montré que 30% des américains sont satisfaits de la façon dont les choses se passent aux Etats-Unis (Institut Gallup, 12 septembre 2012). Supposons qu'un échantillon de 20 américains soit sélectionné dans le cadre d'une étude sur l'état de la nation.

1) Calculez la probabilité qu'exactement 4 des 20 américains interrogés soient satisfaits de la façon dont les choses vont aux États-Unis.

Ici, la variable aléatoire (qu'on appellera X) représentant cette expérience suit bien une loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, n étant le nombre de répétitions de l'épreuve de Bernoulli : l'individu i se déclare satisfait, et p la probabilité de succès (d'être satisfait). On a alors, pour k succès :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ \forall k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$$

Ici, 4 des 10 américains doivent être satisfaits, donc $k = 4$. On a :

$$\mathbb{P}(X = 4) = C_{20}^4 0{,}30^4 (1 - 0{,}30)^{20-4} = \frac{20!}{(20-4)!\,4!} 0{,}30^4 (0{,}70)^{16} = 0{,}13$$

La probabilité qu'exactement 4 des 20 américains interrogés soient satisfaits de la façon dont les choses vont aux États-Unis est de 13%.

2) Calculez la probabilité qu'au moins 2 des américains interrogés soient satisfaits de la façon dont les choses vont aux États-Unis.

Ici, au moins 2 des 20 américains doivent être satisfaits, donc $k \geq 2$. On a :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \big(\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)\big)$$

$$= 1 - (C_{20}^0 0{,}30^0 (1 - 0{,}30)^{20-0} + C_{20}^1 0{,}30^1 (1 - 0{,}30)^{20-1})$$

$$= 1 - (1(0{,}70)^{20} + 20 \times 0{,}30 (0{,}70)^{19}) = 0{,}9924$$

La probabilité qu'au moins 2 des 10 américains soient satisfaits est de 99,24%.

3) Parmi les 20 américains sélectionnés, quel est le nombre attendu de satisfaits ? Calculez la variance et l'écart-type du nombre d'américains satisfaits.

Le nombre moyen d'américains satisfaits est donné par l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = n \times p = 20 \times 0{,}30 = 6$$

Il y aurait donc 6 américains satisfaits dans l'échantillon.

La variance d'une loi binomiale est donnée par : $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

$$\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 6(1 - 0{,}30) = 6 \times 0{,}70 = 4{,}20$$

Ainsi, $\mathbb{V}(X) = 4{,}20$.

L'écart-type est donné par la racine carrée de la variance de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{4{,}20} = 2{,}05$$

Ainsi, $\sigma(X) = 2{,}05$.

Ex 3. Un magicien prétend avoir des capacités de perception extrasensorielle. Des scientifiques lui font passer le test suivant : deviner les 10 résultats de jets successifs d'un dé équilibré. Le magicien donne 7 bonnes réponses.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat équivalent ou meilleur pour un individu sans capacités de perception extrasensorielles ?

Si la personne n'a pas de capacités extrasensorielles, elle répond au hasard. L'expérience consiste donc à deviner le résultat du lancer d'un dé équilibré. Cette expérience a deux issues possibles : soit on devine juste avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, soit l'on se trompe avec une probabilité de $\frac{5}{6}$. L'expérience est répétée dix fois de manière indépendante (le résultat d'un lancer n'influe pas les autres).

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses obtenues. Alors $X \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{6}\right)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{10}^{k} \frac{1}{6}^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}, \forall k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ n\}$$

Puisque l'on cherche la probabilité d'obtenir un résultat équivalent ou meilleur que 7 bonnes réponses, on cherche :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 7) &= \mathbb{P}(X = 7) + \mathbb{P}(X = 8) + \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10)\\ &= C_{10}^{7} \frac{1}{6}^{7} \left(\frac{5}{6}\right)^{3} + C_{10}^{8} \frac{1}{6}^{8} \left(\frac{5}{6}\right)^{2} + C_{10}^{9} \frac{1}{6}^{9} \left(\frac{5}{6}\right)^{1} + C_{10}^{10} \frac{1}{6}^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{0}\\ &= C_{10}^{7} \frac{5^3}{6^{10}} + C_{10}^{8} \frac{5^2}{6^{10}} + C_{10}^{9} \frac{5}{6^{10}} + C_{10}^{10} \frac{1}{6^{10}} = 0{,}000267\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir un résultat équivalent ou meilleur pour un individu sans capacités de perception extrasensorielles est donc de 0,0267%.

2) Combien de réponses correctes obtiendrait en moyenne cet individu ordinaire ?

Le nombre moyen de réponses correctes qu'obtiendrait cet individu ordinaire est donné par l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = n \times p = 10 \times \frac{1}{6} = 1{,}6$$

Il aurait donc 1,6 bonnes réponses.

Ex 4. Supposons l'équiprobabilité et l'indépendance des sexes à la naissance. Quel est le nombre minimum d'enfants qu'un couple doit planifier pour s'assurer 90% de chances d'avoir au moins un garçon et une fille ?

Soit n nombre d'enfants d'un couple. Les naissances sont indépendantes et, pour chacun des enfants, la probabilité d'avoir une fille vaut $\frac{1}{2}$. Soit X le nombre de filles parmi les n enfants. Dans ce cas, $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Ici, on cherche finalement le nombre d'enfants nécessaire au couple pour assurer une probabilité d'au moins 90% d'avoir au moins une fille et un garçon. On cherche donc la valeur de n respectant ces contraintes. Ici, puisque $p = \frac{1}{2}$, on a :

$$\mathbb{P}(X=k)=C_n^k \frac{1}{2}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \forall k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{C_n^k}{2^n}, \forall k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$$

Soit A l'évènement « avoir au moins une fille ($X \geq 1$ car on souhaite au moins une fille) et au moins un garçon ($X \leq n-1$, car on ne veut pas que des filles, mais aussi au moins un garçon). Ainsi, on a :

$$A : 1 \leq X \leq n-1$$

De plus, la probabilité d'occurrence de cet évènement A doit être d'au moins 90%, donc :

$$\mathbb{P}(A) \geq 0{,}90 \Leftrightarrow \mathbb{P}(1 \leq X \leq n-1) \geq 0{,}90$$

Donc :

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq n-1) \geq 0{,}90 \Leftrightarrow 1-\big(\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=n)\big) \geq 0{,}90$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=n) \leq 0{,}10 \Leftrightarrow \frac{C_n^0}{2^n}+\frac{C_n^n}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} \leq 0{,}10$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{2^n} \leq 0{,}10 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \leq 0{,}10 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 10 \Leftrightarrow (n-1)\ln(2) \geq \ln(10) \Leftrightarrow n=4{,}31$$

Le couple doit avoir donc au moins cinq enfants pour s'assurer d'avoir au moins un garçon et une fille avec une probabilité de 0,90.

Ex 5. Supposons que vous ayez le choix entre deux compagnies aériennes pour partir en vacances. La compagnie A affrète un avion quadrimoteur et la compagnie B affrète un bimoteur. Les données techniques indiquent que, dans tous les cas, les moteurs de l'avion fonctionnent indépendamment et chacun a une probabilité p de tomber en panne. Pour arriver à destination sain et sauf, il faut que moins de la moitié des moteurs de l'avion tombe en panne. Quel avion choisissez-vous (Vous discuterez en fonction de la valeur de p) ?

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de moteurs tombant en panne de l'avion A. L'avion A quadrimoteur arrive à destination si $X \leq 1$. De plus, $X \sim \mathcal{B}(4,\ p)$. La probabilité pour que l'avion A arrive à destination vaut donc :

$$\mathbb{P}(X \leq 1)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=C_4^0 p^0(1-p)^{4-0}+C_4^1 p^1(1-p)^{4-1}$$
$$=(1-p)^4+4p(1-p)^3$$

Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de moteurs tombant en panne de l'avion B. L'avion B bimoteur arrive à destination si $Y=0$. De plus, $Y \sim \mathcal{B}(2,\ p)$. La probabilité pour que l'avion B arrive à destination vaut donc :

$$\mathbb{P}(Y=0)=C_2^0 p^0(1-p)^{2-0}=(1-p)^2$$

Pour savoir quel avion choisir, on doit prendre celui dont la probabilité de crash est la moins grande. Cependant, cela dépend de la valeur de la probabilité de panne moteur, p. On doit donc discuter selon cette valeur. Posons la relation telle que la probabilité de crash du bimoteur B soit inférieure à celle du quadrimoteur A. On a alors :

$$\mathbb{P}(X \leq 1) \leq \mathbb{P}(Y=0) \Leftrightarrow (1-p)^4+4p(1-p)^3 \leq (1-p)^2$$
$$\Leftrightarrow (1-p)^2+4p(1-p) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1-2p+p^2+4p-4p^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1+2p-3p^2 \leq 1 \Leftrightarrow p(2-3p) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow p(3p-2) > 0 \Leftrightarrow p(3p-2) > 0 \Leftrightarrow p > \frac{2}{3}$$

On en déduit que si $p > \frac{2}{3}$, alors $\mathbb{P}(X \leq 1) \leq \mathbb{P}(Y = 0)$, c'est-à-dire que la probabilité de crash du bimoteur B est moins grande que celle du quadrimoteur A. Si $p \leq \frac{2}{3}$ (ce qui est beaucoup plus réaliste), on préférera A.