

Corrigé du TD n°4
Applications linéaires

EXERCICE 1

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix}$$

1. $f(\cdot)$ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. En effet,
- le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{R}^2$ (puisqu'il a deux coordonnées) et $\mathbb{R}^2$ est donc l'espace vectoriel de départ,
 - le vecteur $\begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{R}^3$ (puisqu'il a trois coordonnées) et $\mathbb{R}^3$ est donc l'espace vectoriel d'arrivée.

2. Pour écrire $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sous la forme $x\mathbf{C}_1 + y\mathbf{C}_2$, où $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ sont des vecteurs (ou matrices) colonnes de $\mathbb{R}^3$, on commence par écrire le vecteur image $\begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix}$ comme la somme de vecteurs qui ne dépendent que d'une des coordonnées du vecteur de départ :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ -y \\ 2y \end{pmatrix}$$

on peut alors factoriser le premier vecteur par le nombre x et le second par le nombre y :

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ -y \\ 2y \end{pmatrix} = x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'écrit alors sous la forme d'une combinaison linéaire de deux colonnes :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{C}_1 + y\mathbf{C}_2, \text{ avec } \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sachant que le produit d'une matrice $\mathbf{M}$ par une colonne X est égale à la combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{M}$ en prenant comme coefficients les termes de X , on a bien :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, avec $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2)$.

EXERCICE 2

Ci-dessous les éléments de cours qui seront utilisés pour répondre aux questions de cet exercice.

▪ Ensemble de départ et ensemble d'arrivée

Notons m le nombre de lignes et n le nombre de colonnes des matrices de l'exercice, E_i l'ensemble de départ et F_i l'ensemble d'arrivée de l'application f_i . Ces ensembles sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, ou espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des ensembles de type $\mathbb{R}^n$ (ensemble des vecteurs à n coordonnées).

Chaque colonne de la matrice $\mathbf{M}_i$ est l'image d'un vecteur de la base canonique de l'ensemble départ :

- les images ont m lignes et sont donc des vecteurs de $\mathbb{R}^m$: l'ensemble d'arrivée est $F_i = \mathbb{R}^m$
- il y a n colonnes et donc n vecteurs dans la base canonique de l'ensemble départ : l'ensemble de départ est $E_i = \mathbb{R}^n$.

On peut retenir ce résultat :

Le format de la matrice $\mathbf{M}_i$, autrement dit le couple :

$$(\text{nombre de lignes de } \mathbf{M}_i, \text{nombre de colonnes de } \mathbf{M}_i) = (m, n),$$

est égal à :

$$(\text{dimension de l'espace d'arrivée de } f_i(\cdot), \text{dimension de l'espace de départ de } f_i(\cdot)).$$

▪ Image et rang de l'application linéaire, l'application est-elle surjective ?

- **L'image** – ou ensemble image – de l'application f_i est le sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée F_i qui comprend tous les vecteurs ayant au moins un antécédent par f_i :

$$Im_{f_i} = \{Y \in F_i \text{ tels que } Y = f_i(X) \text{ avec } X \in E_i\}$$

$$\text{Ou plus simplement : } Im_{f_i} = \{Y = f_i(X) \text{ avec } X \in E_i\} = \{Y = \mathbf{M}_i X \text{ avec } X \in E_i\}.$$

L'image de l'application f_i est donc l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent $\mathbf{M}_i X$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de $\mathbf{M}_i$:

c'est le sous-espace vectoriel de F_i engendré par les colonnes de $\mathbf{M}_i$.

On en déduit que la dimension de l'ensemble image est égale au rang de la matrice $\mathbf{M}_i$.

- **Le rang** de l'application linéaire est égal par définition à la dimension de son image. Il est donc égal au rang de la matrice $\mathbf{M}_i$.
- Une application est **surjective** si **tous les éléments de son ensemble d'arrivée ont au moins un antécédent**, c'est-à-dire si son ensemble image est égal à son ensemble d'arrivée F_i . Cela est le cas si la dimension de Im_{f_i} est égale à celle de F_i , ou autrement dit si

$$\text{rang } f_i = \dim F_i$$

▪ Noyau de l'application linéaire, l'application est-elle injective ?

- **Le noyau** de l'application f_i est le sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ E_i qui comprend tous les vecteurs ayant pour image le vecteur nul de F_i :

$$Ker_{f_i} = \{X \in E_i \text{ tels que } f_i(X) = \vec{0}_{F_i}\}$$

- ✓ Comme $f_i(X) = \mathbf{M}_i X$, on sait que le noyau contient au moins le vecteur nul.
- ✓ Si il ne contient aucun autre vecteur, on écrit alors $Ker_{f_i} = \{\vec{0}_{E_i}\}$

- ✓ S'il contient d'autres vecteurs (une infinité dans ce cas puisque c'est un sous-espace vectoriel de E_i) on caractérise le noyau de l'application en définissant une de ses bases.

- Une application est **injective** si **tous les éléments de son ensemble Image ont au plus un antécédent**, c'est-à-dire s'il est impossible de trouver deux vecteurs de E_i ayant la même image. Cela implique que le système d'équation $\mathbf{M}_i X = Y$ admet au plus une solution quel que soit $Y \in F_i$. Pour que cela soit vérifié, les colonnes de $\mathbf{M}_i$ doivent être linéairement indépendantes.

On peut retenir le résultat suivant : L'application f_i définie par $f_i(X) = \mathbf{M}_i X$ est injective si :

- ✓ Les colonnes de $\mathbf{M}_i$ sont libres $\Leftrightarrow \text{rang}(\mathbf{M}_i) = \text{nombre de colonnes de } \mathbf{M}_i$
- ✓ Comme par définition $\text{rang} f_i = \text{rang} \mathbf{M}_i$ et puisque le nombre de colonnes de $\mathbf{M}_i$ est égal à la dimension de l'espace de départ, l'application est injective si :

$$\text{rang } f_i = \dim E_i$$

▪ Propriétés de l'application et solutions d'un système d'équations

- Si $f_i(\cdot)$ est **surjective**, tous les éléments de F_i ont au moins un antécédent dans E_i :

$$\forall Y \in F, \text{ le système } AX = Y \text{ admet au moins une solution}$$

Dans ce cas, $\forall Y \in F, \text{rang}(\mathbf{M}_i | Y) = \text{rang}(\mathbf{M}_i)$.

- Si $f_i(\cdot)$ est **injective**, les éléments de F_i ont au plus un antécédent dans E_i

$$\forall Y \in F, \text{ le système } AX = Y \text{ admet au plus une solution.}$$

Dans ce cas,

- ✓ Si $Y \in \text{Im } f_i$, cela signifie que Y est engendré par les colonnes de $\mathbf{M}_i$ et on a alors $\text{rang}(\mathbf{M}_i | Y) = \text{rang}(\mathbf{M}_i)$: **le système admet une solution unique**
- ✓ Si $Y \notin \text{Im } f_i$, cela signifie au contraire que Y n'est pas une combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{M}_i$ et que $\text{rang}(\mathbf{M}_i | Y) = \text{rang}(\mathbf{M}_i) + 1$: **le système n'admet aucune solution**
- Si $f(\cdot)$ est **bijective**, tous les éléments de F_i ont un antécédent unique dans E_i :
 $\forall Y \in F, \text{ le système } AX = Y \text{ admet une solution unique}$

$$1. f_1(X) = \mathbf{M}_1 X, \text{ avec } \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Comme la matrice est de format $(3, 3)$ — on dit plutôt que c'est une matrice carrée d'ordre 3 — l'espace de départ est $\mathbb{R}^3$ et l'espace d'arrivée également.
- $\text{Rang } f_1 = \text{rang } \mathbf{M}_1 = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$
- Comme l'espace de départ de l'application $f_1(\cdot)$ est $E_1 = \mathbb{R}^3$ et comme $\text{rang } f_1 = 3 = \dim E_1$, cette application est injective.

- Comme l'espace d'arrivée de l'application $f_1(\cdot)$ est $F_1 = \mathbb{R}^3$ et comme $\text{rang} f_1 = 3 = \dim F_1$, cette application est surjective.
- Enfin, comme l'application $f_1(\cdot)$ est à la fois injective et surjective, elle est bijective.
- $\text{Im} f_1 = F_1 = \mathbb{R}^3$ car, $f_1(\cdot)$ est surjective.
- $\text{Ker} f_1 = \{\vec{0}\}$ car $f_1(\cdot)$ est injective.
- Comme $f_1(\cdot)$ est bijective, le système $Y = \mathbf{M}_1 X$ admet une solution unique, et ce, quel que soit le vecteur Y de $\mathbb{R}^3$.

2. $f_2(X) = \mathbf{M}_2 X$, avec $\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

- Comme $\mathbf{M}_2$ est une matrice carrée d'ordre 3 —l'espace de départ est $\mathbb{R}^3$ et l'espace d'arrivée également.
- $\text{Rang} f_2 = \text{rang} \mathbf{M}_2 = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$.
- Comme l'espace de départ de l'application $f_2(\cdot)$ est $E_2 = \mathbb{R}^3$ et comme $\text{rang} f_2 = 2 < \dim E_2$, cette application n'est pas injective.
- Comme l'espace d'arrivée de l'application $f_2(\cdot)$ est $F_2 = \mathbb{R}^3$ et comme $\text{rang} f_2 = 2 < \dim F_2$, cette application n'est pas surjective.
- Enfin, comme l'application $f_2(\cdot)$ n'est ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.
- $\text{Im} f_2$ est le sous-espace vectoriel de $F_2 = \mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de $\mathbf{M}_2$. Sa dimension est égale à $\text{rang} f_i = 2$. C'est donc un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
- $\text{Ker} f_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{M}_2 X = \vec{0}\}$. Comme l'application n'est pas injective, le noyau est un sous-espace vectoriel de $E_2 = \mathbb{R}^3$ différent de $\{\vec{0}\}$ et $\dim \text{Ker} f_2 \geq 1$ (c'est au moins une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$)

✓ 1^{ère} méthode de détermination de $\text{ker} f_2$ (ou $\text{ker} \mathbf{M}_2$) : résolution de $\mathbf{M}_2 X = \vec{0}$.

En appliquant la méthode du pivot sur les lignes de $\mathbf{M}_2$, on obtient (voir plus haut) la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système $\mathbf{M}_2 X = \vec{0}$ est donc équivalent au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \vec{0},$$

ce qui donne, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

à savoir :

$$\begin{cases} x = 2y - z = 2z - z = z \\ y = z \end{cases}$$

Le système $\mathbf{M}_2 X = 0$ a donc pour solutions l'ensemble des vecteurs X de la forme $\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$.

$\text{Ker}f_2$ est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

✓ 2^{de} méthode de détermination de $\text{ker}f_2$: utilisation du théorème des dimensions :

$$\dim E_2 = \text{rang}f_2 + \dim \text{ker}f_2$$

On en déduit que $\dim \text{ker}f_2 = \dim E_2 - \text{rang}f_2 = 3 - 2 = 1$.

On sait alors que pour former une base de $\text{ker}f_2$ il suffit de trouver un vecteur non nul de $\text{ker}f_2$, c'est-à-dire un vecteur non nul tel que $\mathbf{M}_2 X = 0$.

Si l'on note $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_3$ les trois colonnes de $\mathbf{M}_2$ respectivement, on remarque que :

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 = \vec{0},$$

ce qui donne :

$$(\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \mathbf{C}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

ou encore :

$$\mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient donc à $\text{ker}f_2$.

Et comme $\dim \text{ker}f_2 = 1$, ce vecteur forme même une base de $\text{ker}f_2$.

$\text{Ker}f_2$ est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Comme $f_2(\cdot)$ n'est pas surjective, le système $Y = \mathbf{M}_2 X$ n'admet pas de solution lorsque Y n'est pas un élément de $\text{Im}f_2$. Mais lorsque $Y \in \text{Im}f_2$, comme l'application n'est pas injective, il n'y a pas une solution unique mais une infinité de solutions. En résumé :

$$\begin{cases} \text{si } Y \in \text{Im}f_2 & \text{le système admet une infinité de solutions} \\ \text{si } Y \notin \text{Im}f_2 & \text{le système n'admet aucune solution} \end{cases}$$

3. $f_3(X) = \mathbf{M}_3 X$, avec $\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Comme la matrice $\mathbf{M}_3$ est de format $(2, 3)$ l'espace de départ de cette application est $E_3 = \mathbb{R}^3$ et son espace d'arrivée est $F_3 = \mathbb{R}^2$.
- $\text{Rang } f_3 = \text{rang } \mathbf{M}_3 = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$.
- Comme le rang de l'application $f_3(\cdot)$ diffère de la dimension de son espace de départ ($\text{rang}f_3 = 2 < \dim \mathbb{R}^3$), cette application n'est pas injective.

- Comme le rang de $f_3(\cdot)$ est égal à la dimension de son espace d'arrivée ($\text{rang} f_3 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$), cette application est surjective.
- Enfin, comme l'application $f_3(\cdot)$ n'est pas injective, elle n'est pas non plus bijective.
- $\text{Im} f_3 = F_3 = \mathbb{R}^2$ car, $f_3(\cdot)$ est surjective.
- $\text{Ker} f_3 = \{X \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{M}_3 X = \vec{0}\}$.

✓ 1^{ère} méthode de détermination de $\text{ker} f_3$ (ou $\text{ker} \mathbf{M}_3$) : résolution de $\mathbf{M}_3 X = \vec{0}$.

En appliquant la méthode du pivot sur les lignes de $\mathbf{M}_3$, on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système $\mathbf{M}_3 X = \vec{0}$ est donc équivalent au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \vec{0},$$

ce qui donne, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases}$$

Le système $\mathbf{M}_3 X = 0$ a donc pour solutions l'ensemble des vecteurs X de la forme $\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 3y \end{pmatrix}$.

$\text{Ker} f_3$ est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

✓ 2^{nde} méthode de détermination de $\text{ker} f_3$: utilisation du théorème des dimensions :

$$\dim E_3 = \text{rang} f_3 + \dim \text{ker} f_3$$

On en déduit que $\dim \text{ker} f_3 = \dim E_3 - \text{rang} f_3 = 3 - 2 = 1$.

On sait alors que pour former une base de $\text{ker} f_3$ il suffit de trouver un vecteur non nul de $\text{ker} f_3$, c'est-à-dire un vecteur non nul tel que $\mathbf{M}_3 X = 0$.

Si l'on note $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_3$ les trois colonnes de $\mathbf{M}_3$ respectivement, on remarque que :

$$2\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + 3\mathbf{C}_3 = \vec{0},$$

ce qui donne :

$$\mathbf{M}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient donc à $\text{ker} f_3$.

Et comme $\dim \text{ker} f_3 = 1$, ce vecteur forme même une base de $\text{ker} f_3$.

$\text{Ker} f_3$ est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

- Comme $f_3(\cdot)$ est surjective, le système $\mathbf{M}_3 X = Y$ a au moins une solution quel que soit le vecteur Y de $\mathbb{R}^2$. Comme elle n'est pas injective, ce n'est pas une solution unique. En résumé : quel que soit le vecteur Y de $\mathbb{R}^2$, le système $\mathbf{M}_3 X = Y$ admet une infinité de solutions.

4. $f_4(X) = \mathbf{M}_4 X$, avec $\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Comme la matrice $\mathbf{M}_4$ est de format $(3, 2)$ l'espace de départ de cette application est $E_4 = \mathbb{R}^2$ et son espace d'arrivée est $F_4 = \mathbb{R}^3$.
- $\text{Rang} f_4 = \text{rang } \mathbf{M}_4 = \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$.
- Le rang de l'application $f_4(\cdot)$ étant égal à la dimension de son espace de départ ($\text{rang} f_4 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$), cette application est injective.
- Comme le rang de $f_4(\cdot)$ diffère de la dimension de son espace d'arrivée ($\text{rang} f_4 = 2$ et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$), cette application n'est pas surjective.
- Enfin, comme l'application $f_4(\cdot)$ n'est pas surjective, elle n'est pas non plus bijective.
- $\text{Im} f_4$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les 2 colonnes de $\mathbb{R}^3$ qui sont linéairement indépendantes. C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2 (soit un plan vectoriel dans $\mathbb{R}^3$).
- $\text{Ker} f_4 = \{\vec{0}\}$ car $f_4(\cdot)$ est injective.
- Comme $f_4(\cdot)$ n'est pas surjective, le système $\mathbf{M}_4 X = Y$ admet au moins une solution si Y appartient à $\text{Im} f_4$ et aucune solution sinon. Et, comme $f_4(\cdot)$ est injective, si le système a une solution, alors cette solution est unique.

EXERCICE 3 (FACULTATIF) —

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $\text{Rang} \mathbf{A} = 2$.

2. Comme, d'après le théorème des dimensions, on sait que :

$$\text{nombre de colonnes de } \mathbf{A} = \dim \text{ker} \mathbf{A} + \text{rang} \mathbf{A} \text{ (ou } \dim E = \dim \text{ker} f + \text{rang} f),$$

il s'ensuit que :

$$\dim \text{ker} \mathbf{A} = 4 - 2 = 2.$$

Pour former une base de $\text{ker} \mathbf{A}$, il faut donc deux vecteurs linéairement indépendants de $\text{ker} \mathbf{A}$, c'est-à-dire deux vecteurs indépendants tels que $\mathbf{A}X = \vec{0}$.

3. Comme $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{B}$ est la matrice $\mathbf{B}$ de l'exercice 4 du TD2), on a :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ et } \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont donc des éléments de $\text{ker} \mathbf{A}$.

Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants (puisqu'ils ne sont pas proportionnels, ces deux vecteurs forment une base de $\ker \mathbf{A}$. L'ensemble $\ker \mathbf{A}$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs.

$$\ker \mathbf{A} = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

EXERCICE 4

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1. \text{rang} \mathbf{M} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

2. $\dim \ker \mathbf{M}$ = nombre de colonnes de $\mathbf{M}$ – $\text{rang} \mathbf{M} = 3 - 1 = 2$: il faut donc deux vecteurs de $\ker \mathbf{M}$ pour en former une base.

3. Si l'on note $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ et $\mathbf{C}_3$ les trois colonnes de $\mathbf{M}$ respectivement, on a :

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 - 2\mathbf{C}_3 = \vec{0},$$

$$\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 = \vec{0},$$

ou encore :

$$2\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_3 = \vec{0},$$

$$\mathbf{C}_1 + 0\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_3 = \vec{0},$$

etc.

Comme $\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 - 2\mathbf{C}_3 = \vec{0}$, on a :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{0};$$

le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est donc un élément de $\ker \mathbf{M}$.

De même, comme $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 + 0\mathbf{C}_3 = \vec{0}$, on a :

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0};$$

le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est donc un élément de $\ker \mathbf{M}$.

En outre, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants (ils forment une matrice de rang 2). Ils forment donc une base de $\ker \mathbf{M}$.

L'ensemble $\ker \mathbf{M}$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs.

$$\ker \mathbf{M} = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

EXERCICE 5

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Cette application linéaire est injective si et seulement si son rang est égal à la dimension de son espace de départ, autrement dit si et seulement si le rang de $\mathbf{M}$ est égal au nombre de colonnes de $\mathbf{M}$ à savoir à 2. Or ceci est le cas puisque les deux colonnes de $\mathbf{M}$ ne sont pas proportionnelles.
2. Cette application étant injective, son noyau se réduit au vecteur nul de son espace de départ, autrement dit $\mathbf{M}X = \vec{0}$ a pour unique solution $X = \vec{0}$.

EXERCICE 6

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ x - y \\ 2y \end{pmatrix}$$

1. On peut représenter une application linéaire $f(\cdot)$ par rapport à d'autres bases que les bases canoniques de ses espaces de départ et d'arrivée. Chaque colonne j de la matrice est alors le vecteur colonne des coordonnées, dans la base de l'espace d'arrivée, de l'image par $f(\cdot)$ du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base de l'espace de départ.

Les deux colonnes de la matrice $\mathbf{N}$ de $f(\cdot)$ de l'exercice 1 par rapport aux bases :

$$\mathcal{B}_E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_F = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

sont donc les coordonnées, dans la base $\mathcal{B}_F$, des vecteurs $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivement.

♦ *Détermination de la première colonne de $\mathbf{N}$*

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2(1) \\ 1 - 1 \\ 2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sont donc les solutions du système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la méthode du pivot à ce système, il vient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

puis :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc : $c = 0, b = 1, a = 1$. Il s'ensuit que la première colonne de $\mathbf{N}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

♦ *Détermination de la seconde colonne de $\mathbf{N}$*

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{M}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 + 2(-1) \\ 1 - (-1) \\ 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ dans la base $\mathcal{B}_F = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ sont donc les solutions du système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la méthode du pivot à ce système, il vient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

puis :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce système est donc : $c = 4$, $b = 1$, $a = -1$. Il s'ensuit que la seconde colonne de $\mathbf{N}$ est :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{N}$ est donc :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.

- Le produit $\mathbf{MB}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ donne les vecteurs images des vecteurs de la base $\mathbf{B}_1$ par l'application f dans la base canonique de l'ensemble d'arrivée.
- Le produit $\mathbf{B}_2\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ correspond au calcul qui est fait pour déterminer les coordonnées des images dans la base canonique $\mathbf{B}_2$. En effet, on a trouvé par exemple $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en résolvant $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a donc bien $\mathbf{MB}_1 = \mathbf{B}_2\mathbf{N}$.

EXERCICE 7

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6x - 3y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

1. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.

- *Détermination de la première colonne de $\mathbf{D}$:*

$$\text{On a } f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $f \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sont donc solution de :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

En résolvant ce système, on obtient : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; première colonne de $\mathbf{D}$

- *Détermination de la seconde colonne de $\mathbf{D}$:*

$$\text{On a } f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sont donc solution de :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En résolvant ce système, on obtient : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; seconde colonne de $\mathbf{D}$.

On a donc :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.

- Le produit $\mathbf{MB} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ donne les vecteurs (colonnes) images des vecteurs de la base $\mathbf{B}$ par l'application $f(\cdot)$ dans la base canonique de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$.
- Le produit $\mathbf{BD} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ correspond au calcul qui est fait pour déterminer les coordonnées des images dans la base $\mathbf{B}$. En effet, on a trouvé par exemple $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ en résolvant $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

On a donc bien $\mathbf{MB} = \mathbf{BD}$. Par ailleurs, la matrice $\mathbf{B}$ étant formée par les vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^2$, on sait qu'elle est de plein rang et en conséquences inversible.

On peut donc en déduire, en multipliant par la droite les deux termes de l'équation par $\mathbf{B}^{-1}$, que :

$$\underbrace{\mathbf{MBB}^{-1}}_{\mathbf{I}_2} = \mathbf{BDB}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{BDB}^{-1}.$$

EXERCICE 8 (FACULTATIF)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ -x - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

$$1. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice $\mathbf{D}$ de cette application par rapport à la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

♦ *Détermination de la première colonne de $\mathbf{D}$*

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque immédiatement que : $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sont donc données par le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui constitue la première colonne de $\mathbf{D}$.

♦ *Détermination de la deuxième colonne de $\mathbf{D}$*

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On remarque immédiatement que : $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sont donc données par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui constitue la deuxième colonne de $\mathbf{D}$.

♦ *Détermination de la troisième colonne de $\mathbf{D}$*

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On remarque immédiatement que : $f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sont donc données par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui constitue la troisième colonne de $\mathbf{D}$.

La matrice $\mathbf{D}$ est donc :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \mathbf{MB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BD} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a donc bien $\mathbf{MB} = \mathbf{BD}$. Par ailleurs, la matrice $\mathbf{B}$ étant formée par les vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$, on sait qu'elle est de plein rang donc inversible.

On peut donc en déduire, en multipliant par la droite les deux termes de l'équation par $\mathbf{B}^{-1}$, que :

$$\mathbf{M} \underbrace{\mathbf{BB}^{-1}}_{\mathbf{I}_2} = \mathbf{BDB}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{BDB}^{-1}.$$

EXERCICE 9

Les coordonnées dans la base canonique des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont données par $\mathbf{MP}$.

Les coordonnées de ces images dans la base $\mathcal{B}$ vérifient $\mathbf{MP} = \mathbf{PN}$, d'où l'on déduit : $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{MP}$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$