Sujet B

Partiel de Mathématiques L2S2 Calcul matriciel et optimisation (2)

Année 2021-2022

Jean-François Caulier et Benoît Rapoport

Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

Durée : 2 heure. Calculatrice interdite. Aucun document ni objet numérique autorisé.

QCM (10 points)

Chaque question du QCM vaut un point. Identifiez toutes les bonnes réponses possibles pour valider ce point. Pas de point négatif en cas d'erreur. Total des points : 10.

Q1 La fonction définie par $f(x,y) = xy^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ **admet un candidat à l'extremum au point** $(x^*, y^*) =$

(a) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (c) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (d) aucune des autres réponses

Q2 Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & 5 & 4 \\ 0 & 4 & -b \\ c & c & 2 \end{pmatrix}$ **vaut**

(a) $4 * \begin{vmatrix} a & 4 \\ c & 2 \end{vmatrix} - b * \begin{vmatrix} a & 5 \\ c & c \end{vmatrix}$

(b) $c * \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -b \end{vmatrix} - c * \begin{vmatrix} a & 4 \\ 0 & -b \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} a & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

(c) $4 * \begin{vmatrix} a & 4 \\ c & 2 \end{vmatrix} + b * \begin{vmatrix} a & 5 \\ c & c \end{vmatrix}$

(d) $-c * \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -b \end{vmatrix} + c * \begin{vmatrix} a & 4 \\ 0 & -b \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} a & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

(e) aucune des autres réponses

Q3 La différentielle totale de la fonction définie par $f(x,y) = \ln\left(\frac{ax}{18y}\right)$, où $a \in \mathbb{R}$, peut s'exprimer par

(a) $\frac{a}{18yx}dx + \frac{ax}{18y^2}dy$ (b) $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$ (c) $\frac{a}{18yx}dx - \frac{ax}{18y^2}dy$ (d) $\frac{dx}{ax} - \frac{dy}{18y}$

(e) aucune des autres réponses

Q4 Cochez si la matrice proposée est compatible avec la forme quadratique suivante : $\cancel{c}x^2 + 7xy + axy + \cancel{3}y^2 + 2bxz + 4yz + cyz + az^2$, **où** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & c \\ c & a & b \\ b & 4 & a \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} c & 7 & b \\ a & 3 & 4 \\ b & c & a \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} c & a & b \\ b & 4 & a \\ 7 & 3 & c \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} c & a & b \\ 7 & 3 & c \\ b & 4 & a \end{pmatrix}$

(e) aucune des autres réponses

Q5 La fonction définie par $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy + 2y$ **au point** $(-1, 1)$ **est :**

(a) strictement concave
(b) strictement convexe
(c) concave
(d) convexe
(e) aucune des autres réponses

Q6 Soit la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. **Parmi les valeurs suivantes, cochez celles qui ne correspondent pas à un mineur principal d'ordre 2.**

(a) 6
(b) -3
(c) 0
(d) 3
(e) aucune des autres réponses

Q7 Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x + \beta}$, **où** $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. **Le développement de Taylor d'ordre 2 (sans reste) de la fonction** f **au point** $x_0 = 1$ **peut s'écrire :**

(a) $\sqrt{4+\beta} + \frac{2}{\sqrt{4+\beta}}(x-1) - \frac{4}{(4+\beta)^{3/2}}(x-1)^2$

(b) $\sqrt{4+\beta} + \frac{2}{\sqrt{4+\beta}}x - \frac{4}{(4+\beta)^{3/2}}x^2$

(c) $\sqrt{4+\beta} + \frac{2}{\sqrt{4+\beta}}(x-1) - \frac{2}{(4+\beta)^{3/2}}(x-1)^2$

(d) $\sqrt{4x+\beta} + \frac{2}{\sqrt{4x+\beta}}(x-1) - \frac{4}{(4x+\beta)^{3/2}}(x-1)^2$

(e) aucune des autres réponses

Q8 **Soit la fonction f définie par $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ et la contrainte (C) $10x_1^2 + 7x_2^2 = 4$. Quels sont les candidats à l'extremum de f sous la contrainte (C) ?**

(a) $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$

(b) $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{10}{\sqrt{20}}, \frac{7}{\sqrt{14}}\right)$

(c) $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{14}}\right)$

(d) aucune des autres réponses

Q9 **On peut dire que la matrice** $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

(a) est indéfinie (b) est définie positive (c) est définie négative (d) aucune des autres réponses

Q10 **La fonction f définie par $f(x, y, z) = \frac{x + y}{z^2}$ est une fonction homogène de degré**

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) n'est pas homogène

(e) aucune des autres réponses

Partie rédigée (10 points) : Maximisation d'une utilité sous contrainte de budget non linéaire.

Un consommateur disposant d'un revenu R maximise son utilité $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, dépendant de la quantité consommée de deux biens 1 et 2.
Remarque : les parties II et III sont indépendantes mais la partie II dépend de la partie I.

Partie I : contrainte de budget non-linéaire - conditions du premier ordre
Suite à la volonté de limiter la consommation du bien 1, le gouvernement décide de fixer lui-même le prix. Il le rend donc le prix unitaire proportionnel à la quantité consommée. Plus spécifiquement le prix du bien 1 vaut $p_1 x_1$. Le prix du bien 2, lui, est fixe et vaut p_2. La contrainte de budget est donc non-linéaire et s'écrit $(p_1 x_1)x_1 + p_2 x_2 = R$, c'est-à-dire $p_1 x_1^2 + p_2 x_2 = R$.

1. Ecrire le programme de maximisation.
2. Ecrire le lagrangien de ce programme.
3. Ecrire les conditions du premier ordre du programme.
4. Déterminer les quantités de biens 1 et 2 optimales x_1^* et x_2^* (en fonction des prix, du revenu et du paramètre α).

Partie II : contrainte de budget non-linéaire - conditions du second ordre. Pour la partie II et seulement pour cette partie $\alpha = \frac{1}{2}$

5. Déterminer les dérivées partielles secondes du lagrangien.
6. En examinant soigneusement les dérivées secondes du lagrangien, déterminer leur signe (rappel : le multiplicateur de Lagrange est positif).
7. Ecrire la matrice hessienne bordée du programme de maximisation en fonction des dérivées secondes du lagrangien.
8. A l'aide de la question sur le signe des dérivées partielles secondes du lagrangien, déterminer le signe de la matrice hessienne bordée. Conclure sur la nature de l'extremum solution du programme de maximisation.

Partie III : fonctions homogènes

9. Montrer que la fonction d'utilité U est homogène. De quel degré ?
10. Enoncer le théorème d'Euler.
11. Appliquer le théorème d'Euler à la fonction d'utilité U. En déduire une relation entre l'élasticité de l'utilité de la consommation du bien 1 $\frac{\partial U}{\partial x_1} / \frac{U}{x_1}$ et l'élasticité de l'utilité de la consommation du bien 2 $\frac{\partial U}{\partial x_2} / \frac{U}{x_2}$.